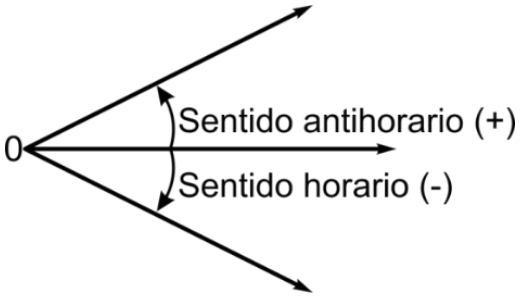
ANGULO TRIGONOMÉTRICO y RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS I

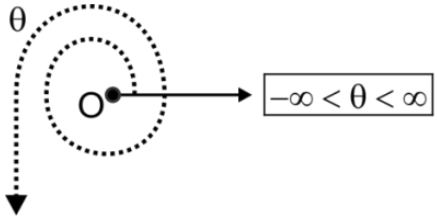
Es el ángulo generado por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo (vértice) de una posición inicial (lado inicial), a otra final (lado final). Los ángulos generados por rotaciones en sentido contrario a las agujas del reloj se consideran positivos, y negativos los de sentido inverso.

Si denotamos al ángulo por θ, diremos que θ es la medida del ángulo.



Observación:

1. Los ángulos no tienen límite, es decir pueden tomar valores infinitamente grandes.



2. Cuando el lado inicial y el final coinciden se le llama ángulo de una vuelta. Tomamos como referencia el ángulo de una vuelta para medir los ángulos.

SISTEMA DE MEDIDAS ANGULARES

Sistema Sexagesimal (S)

La unidad de medida es el grado sexagesimal (1°), de modo que:

$$1 \text{ vuelta} = 360°$$

Sistema Centesimal (C)

La unidad de medida es el grado sexagesimal (1^g), de modo que:

$$1 \text{ vuelta} = 400^g$$

Observación:

$1° = 60'$	$1^g = 100^m$
$1' = 60''$	$1^m = 100^s$
$1° = 3600''$	$1^g = 10\,000^s$

Sistema Radial (R)

La unidad de medida es el "radian" y es igual a un arco donde su longitud es igual a la de su radio, luego:

$$1 \text{ vuelta} = 2\pi \text{ radianes} \quad (\pi \approx 3{,}1416 \text{ aprox.})$$

Relación entre Sistemas

$S = 180\,K$

$C = 200\,K$

$R = \pi\,K$

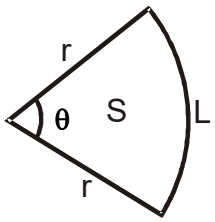
$$\frac{S}{180} = \frac{C}{10} = \frac{R}{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{S}{9} = \frac{C}{10}} \qquad \boxed{\frac{m}{27} = \frac{n}{50}} \qquad \boxed{\frac{p}{81} = \frac{q}{250}}$$

En grados En minutos En segundos

LONGITUD DE ARCO.-

Esto se deduce de un hecho (probado en geometría) que la longitud de un arco es proporcional a la medida de su ángulo central.



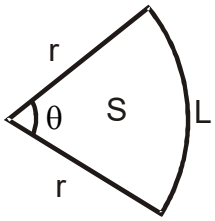
"θ" se mide en radianes

$$\boxed{L = \theta . r}$$

θ: Ángulo central se mide en radianes
r: Radio
L: Longitud de arco

ÁREA DE LA REGIÓN DE SECTOR CIRCULAR. -

Es la porción de un círculo delimitada por dos de sus radios que forman un ángulo central θ. Como el área de un sector circular viene a ser $\frac{\theta}{2\pi}$ del área total de un círculo el cual es πr^2, obtenemos:

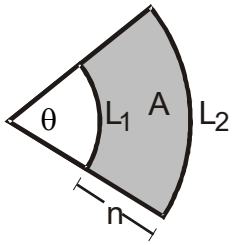


$$\boxed{S = \frac{\theta . r^2}{2}}$$

También:

$$\boxed{S = \frac{L . r}{2}} \qquad \boxed{S = \frac{L^2}{2\theta}}$$

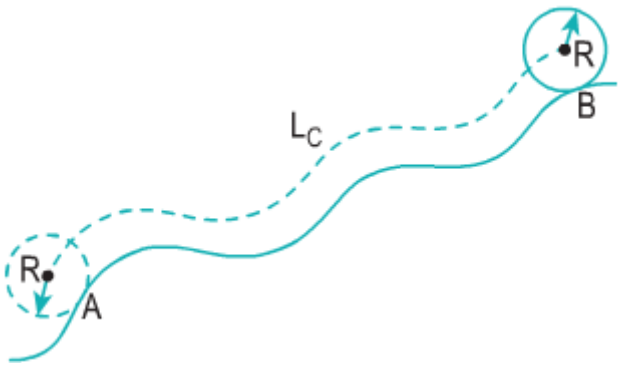
ÁREA DE LA REGIÓN DE UN TRAPECIO CIRCULAR. -



$$\boxed{A = \frac{(L_1 + L_2)}{2} n}$$

$$\boxed{\theta = \frac{L_2 - L_1}{n}}$$

NÚMERO DE VUELTAS.-



$$n_V = \frac{L_C}{2\pi R} \qquad L_C = \theta_g \cdot R$$

Donde:

n_V: número de vueltas que da la rueda al desplazarse de A hacia B.

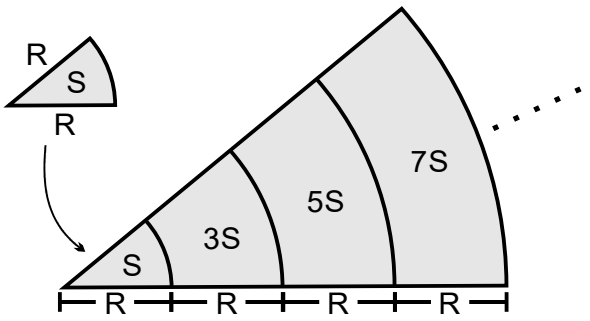
θ_g: giro de la rueda en radianes.

L_C: longitud recorrida por el centro de la rueda.

R: radio de la rueda.

Observación:

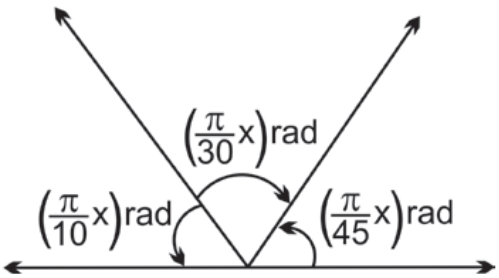
El incremento del mismo radio "R" en un sector circular de área "S", genera un incremento de área proporcional a los números impares de "S.



EJERCICIOS DE CLASE

1. En la figura adjunta, halle el complemento de menor ángulo positivo.

A) $\frac{\pi}{4}$rad
B) $\frac{\pi}{5}$rad
C) $\frac{\pi}{2}$rad
D) $\frac{\pi}{10}$rad
E) $\frac{\pi}{20}$rad



2. Si $24{,}3075°$ equivalen a $a°b'c''$, calcule el valor de $M = \frac{a-b}{c-a}$.

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

3. Si $\frac{\pi}{13}$rad equivalen a $\overline{mn}°50'\overline{4p}''$ calcule el valor $R = m+n+p$.

A) 8 B) 7 C) 10 D) 11 E) 4

4. Simplificar $R = \frac{a°b' + b°a'}{(a+b)'} + \frac{a^g b^m + b^g a^m}{(a+b)^m}$

A) 80 B) 167 C) 160 D) 162 E) 54

5. ¿Cuántos grados sexagesimales mide un ángulo si los números que expresan su medida en grados sexagesimales (S) y centesimales (C) están definidos por:

$$S = (2n^2 + 3n + 1)° \quad \text{y} \quad C = (3n^2 + n - 2)^g$$

A) 16º B) 30º C) 45º D) 60º E) 75º

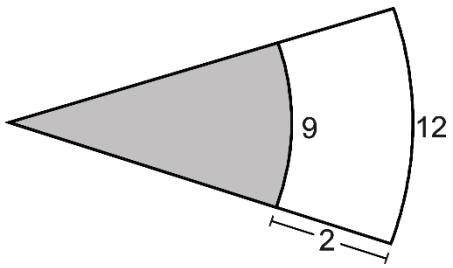
6. Si S, C y R son las medidas de un mismo ángulo en los tres sistemas convencionales. Simplifique

$$M = \frac{(SC + SR + CR)\left(724 + \left(\frac{\pi}{10}\right)^2\right)}{(S^2 + C^2 + R^2)\left(18 + \frac{19\pi}{100}\right)}$$

A) 5 B) 10 C) 20 D) 15 E) 25

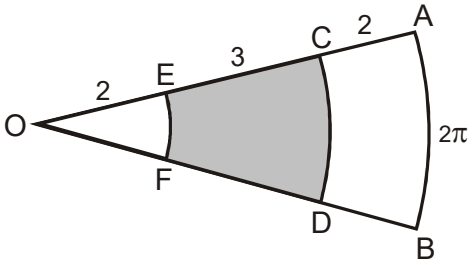
7. Del grafico mostrado, calcule el área de la región sombreada

A) 15 u^2
B) 18 u^2
C) 21 u^2
D) 24 u^2
E) 27 u^2



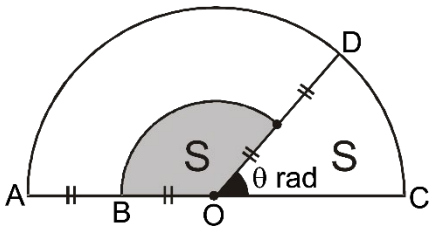
8. En la figura mostrada, AOB, COD y EOF son sectores circulares, halle el perímetro de la región sombreada.

A) $(\pi + 6)$ u
B) $(4\pi + 6)$ u
C) $(2\pi + 6)$ u
D) $(5\pi + 6)$ u
E) $(3\pi + 6)$ u

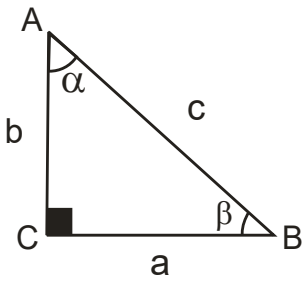


9. Determine el valor de θ en el gráfico mostrado.

A) $\frac{\pi}{3}$
B) $\frac{\pi}{5}$
C) $\frac{\pi}{6}$
D) 5π
E) 2π



TRIÁNGULO RECTÁNGULO.-



$$\boxed{\alpha+\beta=90^\circ}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{a}{c}\Leftrightarrow\csc\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha=\frac{b}{c}\Leftrightarrow\sec\alpha=\frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha=\frac{a}{b}\Leftrightarrow\cot\alpha=\frac{b}{a}$$

PROPIEDADES.-

1) Teorema de Pitágoras:

$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$

2) Razones Trigonométricas Reciprocas.-

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha\cdot\csc\alpha=1}\qquad\boxed{\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1}$$

$$\boxed{\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1}$$

3) Razones Trigonométricas de ángulos Complementarios.-

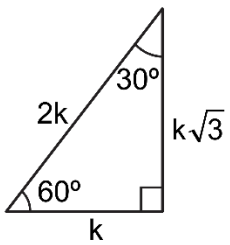
$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha=\cos\beta}\quad\boxed{\tan\alpha=\cot\beta}\quad\boxed{\sec\alpha=\csc\beta}$$

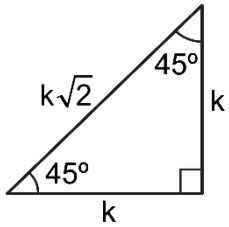
$$\leftrightarrow\alpha+\beta=90^\circ$$

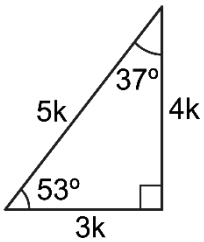
4) A partir de la definir podemos deducir que

- $\boxed{0<\cos\alpha<1}$ y $\boxed{0<\operatorname{sen}\alpha<1}$
- $\boxed{\sec\alpha>1}$ y $\boxed{\csc\alpha>1}$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES.-







EJERCICIOS DE CLASE

10. Si $40^\circ+\theta$ es un ángulo agudo y $\sec(40^\circ+\theta)=3$, calcule $3\cos(40^\circ+\theta)+\dfrac{5\cot(50^\circ-\theta)\cot(40^\circ+\theta)}{\cos(50^\circ-\theta)\csc(40^\circ+\theta)}$.

A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

11. Si $\tan2x=2\sqrt{2}$, con $0<x<\frac{\pi}{4}$, determine el valor de la expresión $\sqrt{2}+\tan\frac{x}{2}$.

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) -2 D) 3 E) -1

12. En un triángulo ABC (B = 90°) se cumple que $\tan A+\tan C=2\csc C$.
Evalúe $\csc^2 A-\tan^2 C+\sec C$.

A) 0 B) 2 C) 1 D) 3 E) 5

13. Si α y β son ángulos agudos que satisfacen

$$\begin{cases}\cot5\alpha-\tan8\beta=0\\ \csc\alpha\cdot\sec2\beta=1\end{cases}$$

Evalúe
$G=4\operatorname{sen}^2(4\alpha+5^\circ)+\tan^2(5\alpha+2\beta)+5\operatorname{sen}(3\alpha+\beta+2^\circ).$

A) 8 B) 7 C) 10 D) 11 E) 4

EJERCICIOS DE EVALUACIÓN

1. Simplifique siendo S, C, R lo convencional.

$$E=\sqrt{\frac{3\pi C-2\pi S+10R}{0,1\pi S-8R}}$$

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

2. Calcular "x" si se cumple:

$$\left[\frac{(x+3)^\circ}{5^g}\right]^\circ=\left[\frac{(4x-18)^\circ}{15^g}\right]^g$$

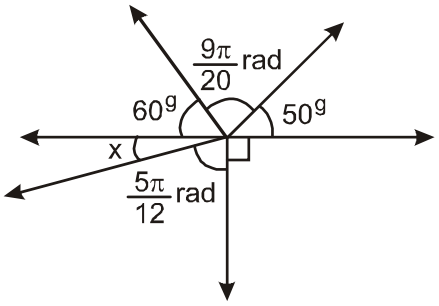
A) 40 B) 41 C) 42 D) 43 E) 45

3. Los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal son X^{100} y $X^{100}+1$ respectivamente. Halle el valor del ángulo expresado en radianes.

A) $\frac{\pi}{20}$ rad B) $\frac{\pi}{7}$ rad C) $\frac{\pi}{18}$ rad
D) $\frac{\pi}{15}$ rad E) $\frac{\pi}{12}$ rad

4. En la figura, halle el valor de x

A) 20°
B) 15°
C) 30°
D) 25°
E) 45°



5. Halle el valor de

$$N=\frac{67\pi}{90}\left(\frac{35°+\frac{13\pi}{90}\text{rad}}{\frac{140^g}{9}+\frac{2\pi}{3}\text{rad}}\right).$$

A) 64 B) 57 C) 61 D) 41 E) 23

6. Un ángulo no nulo mide S° y C^g en los sistemas sexagesimales y centesimales respectivamente. Si $\frac{S^3+S^2C+S^2}{SC^2-C^3+2C^2}=0{,}81$, halle la medida del ángulo en el sistema radial.

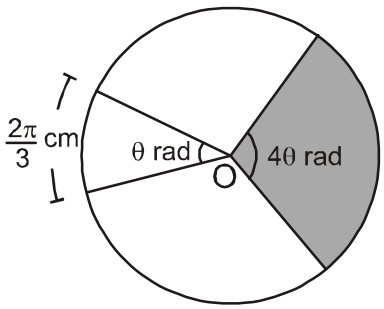
A) $\frac{3\pi}{100}$ B) $\frac{5\pi}{28}$ C) $\frac{\pi}{200}$ D) $\frac{\pi}{350}$ E) $\frac{\pi}{400}$

7. Si S y C son los números que representan la medida de un ángulo en los sistemas sexagesimal y centesimal respectivamente y $\frac{S+2}{C}=\frac{C-2}{S}$, calcule la medida de dicho ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{20}$ B) $\frac{\pi}{10}$ C) $\frac{3\pi}{20}$ D) $\frac{3\pi}{10}$ E) $\frac{\pi}{15}$

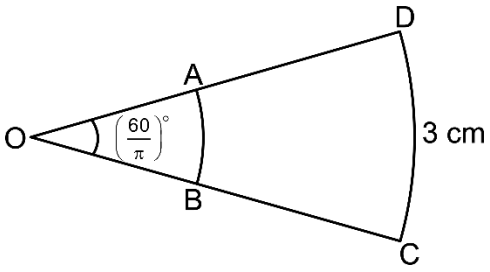
8. En la figura, se tiene una circunferencia de centro O y el área de la región sombreada es $\frac{16\pi}{3}\text{cm}^2$, calcular la medida del radio de la circunferencia.

A) 8 cm
B) 2 cm
C) 6 cm
D) 5 cm
E) 4 cm

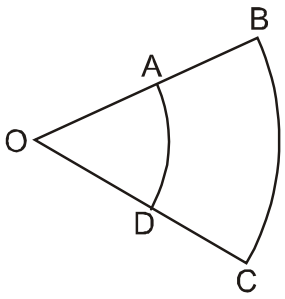


9. En la figura que se muestra, la relación entre el área del trapecio circular ABCD y el área del sector circular AOB es 8, hallar el área del sector circular AOB.

A) 7 cm²
B) 3,5 cm²
C) 3 cm²
D) 1,5 cm²
E) 1 cm²



10. En la figura, D es punto medio de $\overline{OC}$. El sector circular AOD y el trapecio circular ABCD tienen áreas $S_1\,u^2$ y $S_2\,u^2$, respectivamente, calcular $\frac{S_1}{S_2}$.



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{5}$

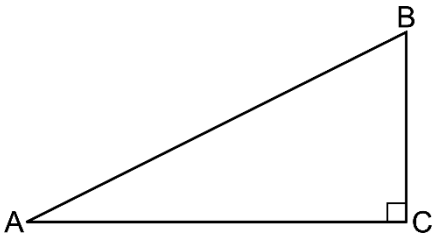
11. Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo T son a metros, b metros y c metros siendo a, b, c números pares consecutivos. Calcule $\cot\frac{\alpha}{2}$, si α es el mayor ángulo agudo de T.

A) $\frac{3}{2}$ B) 2 C) $\frac{5}{4}$ D) 3 E) $\frac{5}{2}$

12. En el triángulo ABC de la figura, se tiene que $3\operatorname{sen}A\cdot\operatorname{sen}B-\cos A=0$. Calcule

$$\sqrt{2}\,(\tan A+\csc B).$$

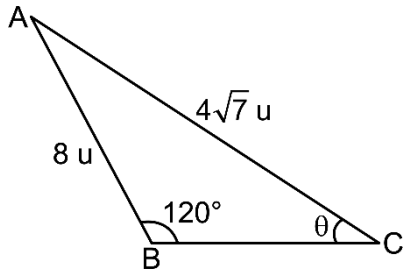
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6



13. En un triángulo rectángulo ABC, recto en C se cumple $2\csc A\cdot\csc B=5$. Halle $2(\tan A+\tan B)$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

14. De la figura mostrada, halle secθ.



A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ E) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$