

SEGMENTOS Y ÁNGULOS – TRIÁNGULOS

SEGMENTO DE RECTA

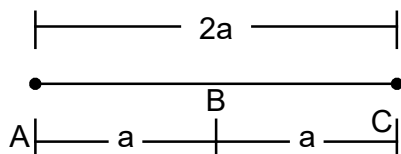
Es una porción de recta limitado por dos puntos denominados extremos.



Se denota por $\overline{AB}$ y se lee segmento AB. La medida de un segmento AB denota por $m\overline{AB}$ o AB, y es un número positivo que compara la longitud del segmento dado con la longitud del segmento unitario (u).

Punto medio de un segmento

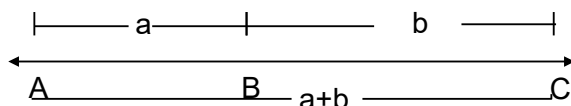
Un punto B se llama punto medio de un segmento $\overline{AC}$, si B está entre A y C y se verifica que $AB = BC$.



Operaciones con segmentos

Para sumar dos segmentos cualesquiera, se toman en una recta dos segmentos consecutivos cualesquiera y congruentes respectivamente a los segmentos que se quieren sumar.

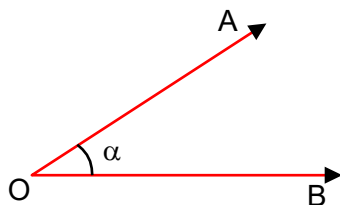
Suma:



$$AC = AB + BC$$

ÁNGULO

Es aquella figura geométrica que resulta de la unión de dos rayos que tienen el mismo punto de origen.



Elementos

Lados: $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

Vértice: O

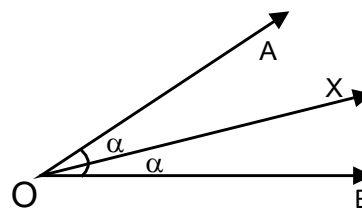
Notación

Ángulo AOB: $\angle AOB$ $\sphericalangle$ AOB v $\widehat{A}OB$

Medida del ángulo AOB: $m\angle AOB = \alpha$

Bisectriz de un Ángulo:

Es el rayo que partiendo del vértice de un ángulo, lo divide en dos ángulos de igual medida.



$$m\angle AOX = \angle XOB = \alpha$$

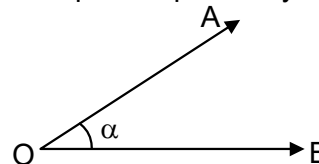
$\overline{OX}$: Bisectriz del $\angle AOB$

Clasificación de los Ángulos

Los ángulos se clasifican según su medida, por la posición de sus lados y según la relación entre sus medidas.

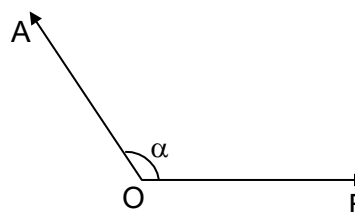
I. Según su medida

1. **Ángulo Agudo.** Es aquel ángulo cuya medida es menor que 90° pero mayor que 0°



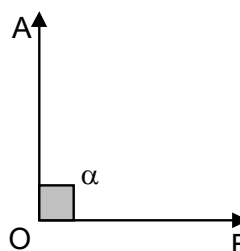
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

2. **Ángulo Obtuso:** Es aquel ángulo cuya medida es menor que 180° pero mayor que 90°



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

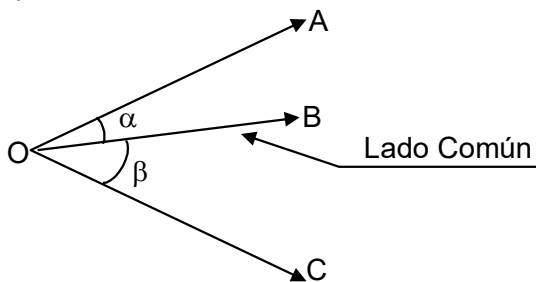
3 **Ángulo Recto:** Es aquel ángulo cuya medida es igual a 90° .



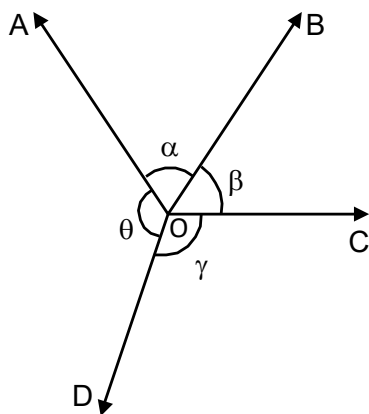
$$\alpha = 90^\circ$$

II. SEGÚN LA POSICIÓN DE SUS LADOS

- 1. Ángulos Adyacentes.** Dos ángulos son adyacentes cuando tienen el mismo vértice y un lado común tal que los ángulos se encuentran a uno y otro lado del lado común.



AOB y BOC son ángulos adyacentes, llamado también ángulos consecutivos.

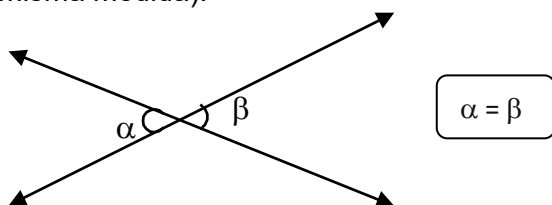


$\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ y $\widehat{AOD}$ son ángulos adyacentes alrededor de un punto

2. Ángulos Opuestos por el Vértice

Son dos ángulos en donde los lados de uno son los rayos opuestos del otro.

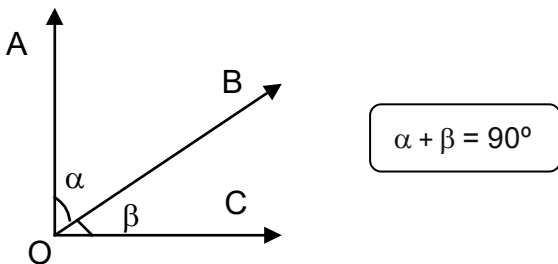
Es decir, se determinan al trazar dos rectas secantes, dichos ángulos son congruentes (tienen la misma medida).



III. Según la relación entre sus medidas

1. Ángulos Adyacentes Complementarios

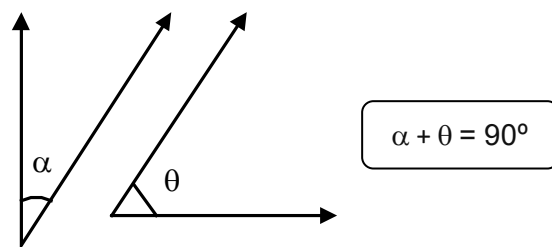
Son dos ángulos adyacentes cuyas medidas suman 90° .



$\widehat{AOB}$ y $\widehat{BOC}$ son ángulos adyacentes complementarios

2. Ángulos Complementarios

Son dos ángulos cuyas medidas suman 90° .



Nota 1. Complemento de un ángulo es lo que le falta a este ángulo para medir 90° .

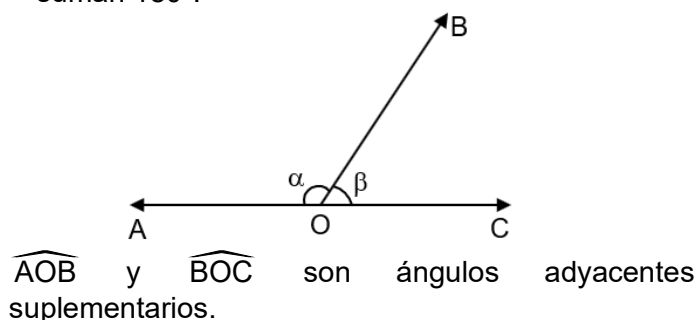
$$\text{complemento de } \alpha = 90^\circ - \alpha = \theta$$

Nota 2:

$$1^\circ <> 60', \quad 1' <> 60'' \\ 90^\circ <> 89^\circ 60' <> 89^\circ 59' 60''$$

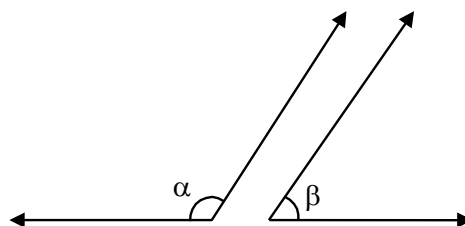
3. Ángulos Adyacentes Suplementarios

Son dos ángulos adyacentes cuyas medidas suman 180° .



4. Ángulos Suplementarios

Son dos ángulos cuyas medidas suman 180° .



Nota 3. Suplemento de la medida de un ángulo es lo que le falta para medir 180° .

$$\text{suplemento de } \alpha = 180^\circ - \alpha = \beta$$

Nota 4:

$$180^\circ <> 179^\circ 60' <> 179^\circ 59' 60''$$

Nota 5:

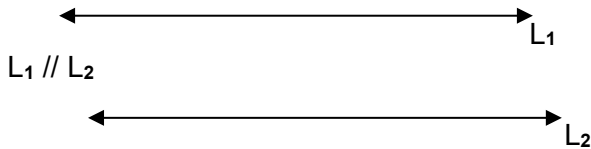
Cuando la palabra suplemento se repite un número par de veces, el resultado es el mismo valor del ángulo y si el número es impar, el resultado es su suplemento.

$$\underbrace{\text{Sup del Sup} \dots \dots \text{Sup de } \alpha}_{\text{\#ro. veces par}} = \alpha$$

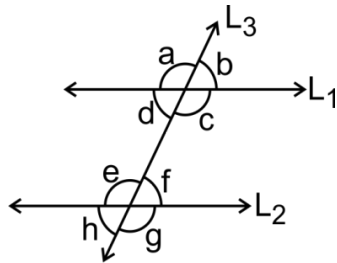
$$\underbrace{\text{Sup del Sup} \dots \dots \text{Sup de } \alpha}_{\text{\#ro. veces impar}} = 180^\circ - \alpha$$

ÁNGULOS ENTRE PARALELAS

Paralelas: Se llama rectas paralelas cuando no tienen ningún punto en común y están situados en un mismo plano.



ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA SECANTE



1. Ángulos alternos internos:

Los ángulos alternos internos o externos son congruentes.

$$c = e \quad \wedge \quad d = f$$

2. Ángulos alternos externos:

$$a = g \quad \wedge \quad h = b$$

3. Ángulos conjugados internos:

Los ángulos conjugados internos o externos son suplementarios.

$$c + f = 180^\circ \quad \wedge \quad d + e = 180^\circ$$

4. Ángulos conjugados externos

$$b + g = 180^\circ \quad \wedge \quad a + h = 180^\circ$$

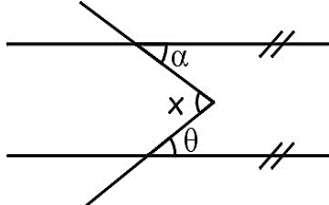
5. Ángulos Correspondientes

Los ángulos correspondientes son congruentes.

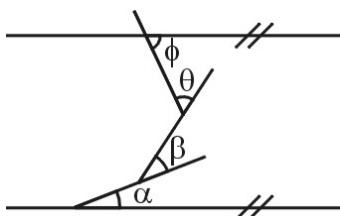
$$a = e \quad \wedge \quad d = h$$

$$b = f \quad \wedge \quad c = g$$

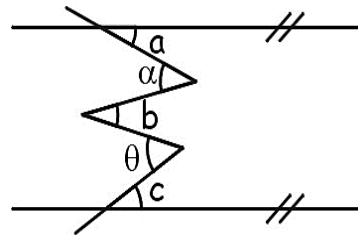
PROPIEDADES Si $L_1 \parallel L_2$



$$x = \alpha + \theta$$

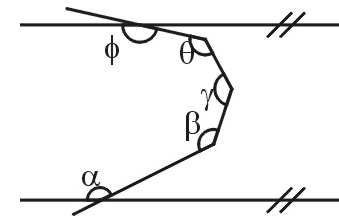


$$\alpha + \beta + \theta + \phi = 180^\circ$$



$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \theta$$

$n = \text{número segmentos}$



$$\alpha + \beta + \gamma + \theta + \phi = 180^\circ \cdot n$$

$n = \text{número segmentos}$

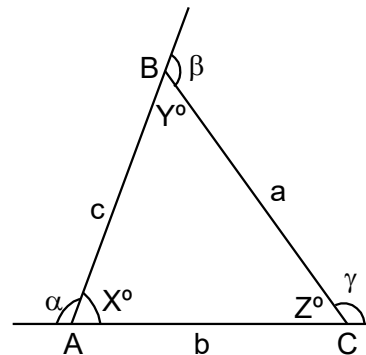
1. TRIÁNGULOS

Llamamos triángulo a la figura geométrica formada por la reunión de tres segmentos determinados al unir tres puntos no colineales. En símbolos:

Sean A, B y C tres puntos cualesquiera no colineales, definimos: $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$

Notación: $\triangle ABC$: se lee triángulo ABC.

1.1. Elementos:



Vértices: A, B, C
Lados: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$

Ángulos interiores : x, y, z

Ángulos exteriores: α, β, θ

Perímetro : $2p = a + b + c$

Semiperímetro : $p = \frac{a + b + c}{2}$

Observación:

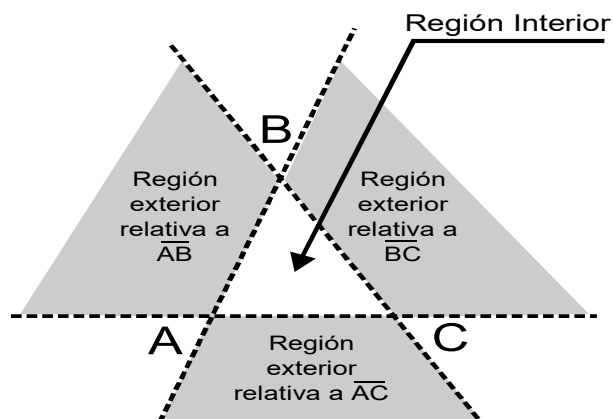
Las medidas de los lados del triángulo se designan por la letra minúscula del vértice opuesto a dicho lado así: $BC = a, AC = b, AB = c$.

Todo triángulo divide al plano en tres subconjuntos de puntos:

- Puntos interiores al triángulo
- Puntos exteriores al triángulo y
- Puntos del triángulo

Región Triangular es una figura formada por los puntos del triángulo y los puntos interiores al triángulo.

Cuando se dice área del triángulo, se refiere al área de la región triangular.



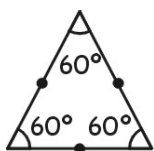
2. CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

Se clasifican por sus lados y por sus ángulos.

2.1. Por sus lados. Se clasifican en:

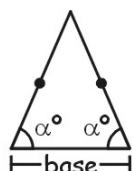
- Triángulo equilátero.** Tiene sus tres lados de igual longitud. Cada ángulo interior mide 60° .
- Triángulo isósceles:** Tiene dos lados de igual longitud. El tercer lado se llama base, los ángulos en la base son congruentes.
- Triángulo escaleno:** Tiene sus tres lados de diferente longitud.

Equilátero



3 lados $\equiv$

Isósceles



2 lados $\equiv$

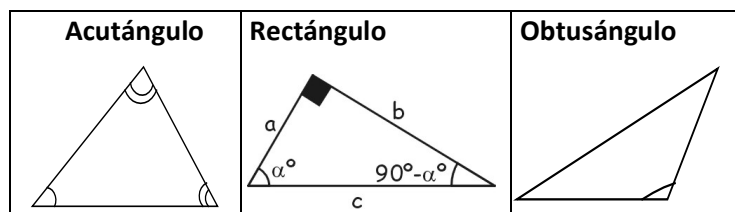
Escaleno



3 lado $\neq$

2.2. Por sus ángulos. Se clasifican en:

- Triángulo acutángulo.** Tiene un ángulo recto. El lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los otros lados, catetos.
- Triángulo rectángulo.** Tiene sus tres ángulos internos agudos.
- Triángulo obtusángulo.** Tiene un ángulo interno obtuso.



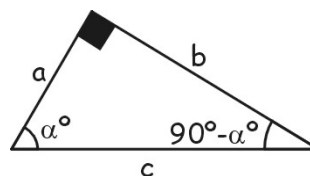
Observación:

- Los triángulos acutángulos y obtusángulos se les llama oblicuángulos.



Teorema de Pitágoras

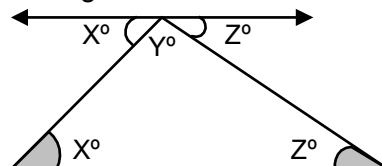
En todo triángulo rectángulo se cumple que: la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

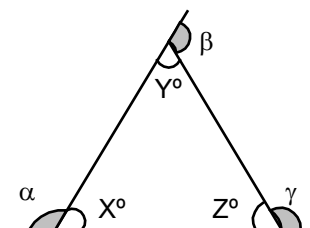
3. TEOREMAS FUNDAMENTALES

Teorema 1.- En todo triángulo la suma de las medidas de sus ángulos interiores es 180° .



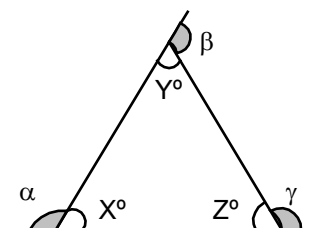
$$x + y + z = 180^\circ$$

Teorema 2.- En todo triángulo la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de dos ángulos interiores no adyacentes a él.



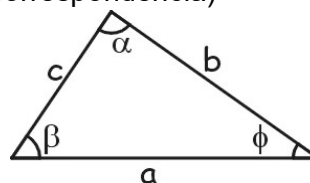
$$\begin{aligned}\alpha &= y + z \\ \beta &= x + z \\ \gamma &= x + y\end{aligned}$$

Teorema 3.- En todo triángulo la suma de las medidas de sus ángulos exteriores es 360° .



$$\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$$

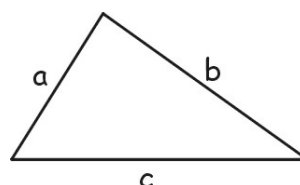
Teorema 4.- En todo triángulo a mayor lado se le opone mayor ángulo y viceversa. (propiedad de correspondencia)



$$\text{Si: } a > b > c \Leftrightarrow \alpha > \beta > \phi$$

Teorema 5.- (Teorema de la existencia del triángulo)

La longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados pero mayor que su diferencia.

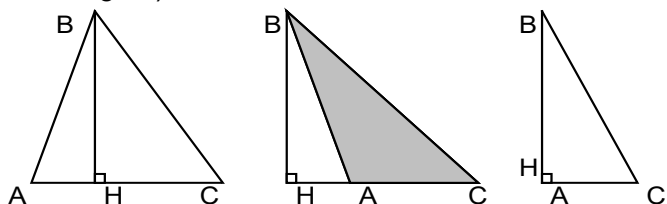


$$\begin{aligned}\text{Si: } a \geq b \geq c \Rightarrow \\ b - c < a < b + c \\ a - c < b < a + c \\ a - b < c < a + b\end{aligned}$$

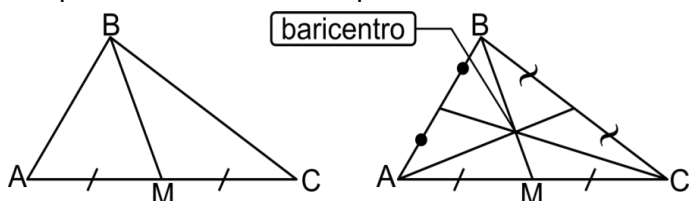
4. LÍNEAS NOTABLES

Las líneas notables son aquellas que cumplen funciones específicas en el triángulo, dichas líneas son: Altura, Mediana, Mediatriz, Bisectriz interior, Bisectriz exterior.

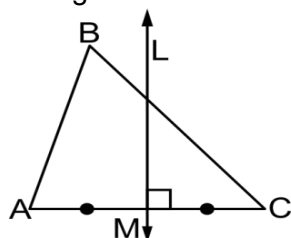
4.1. Altura. Segmento perpendicular trazado desde un vértice del triángulo al lado opuesto. En las figuras, el segmento BH es una altura del triángulo ABC (su posición depende del tipo de triángulo).



4.2. Mediana: Es un segmento que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.

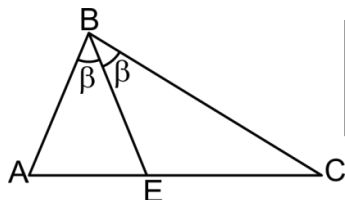


4.3. Mediatriz: Es una recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio, dicha recta se encuentra en el mismo plano que contiene al triángulo.



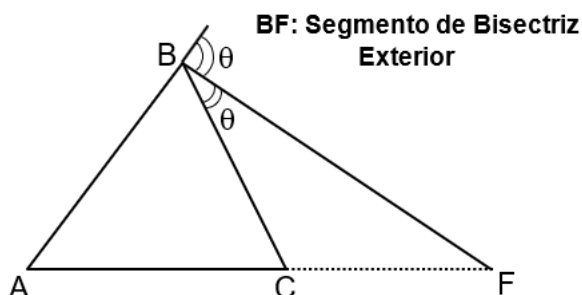
L: Mediatriz de AC

4.4. Bisectriz interior. Es el segmento que partiendo de un vértice biseca al ángulo interior.



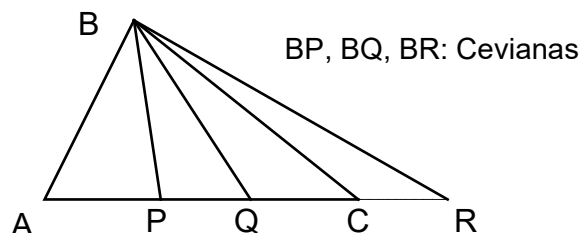
$\overline{BE}$: Bisectriz interior del ángulo ABC

4.5. Bisectriz exterior: Es el segmento que partiendo de un vértice biseca al ángulo exterior.

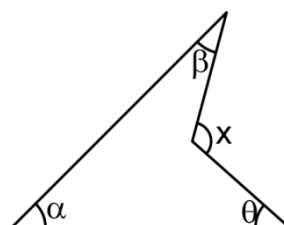


BF: Segmento de Bisectriz Exterior

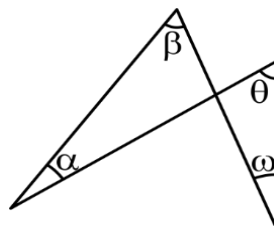
4.6. Ceviana: Es el segmento que une un vértice con un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación. Desde un vértice se puede trazar infinitas cevianas. Por lo tanto la ceviana no es línea notable. El nombre de ceviana se debe en honor al matemático italiano CEVA en 1678.



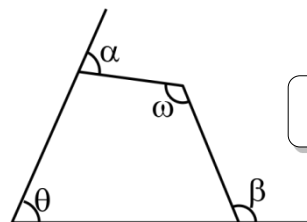
BP, BQ, BR: Cevianas

5. PROPIEDADES

$$x = \alpha + \beta + \theta$$

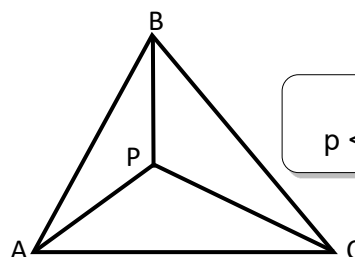


$$\alpha + \beta = \theta + \omega$$

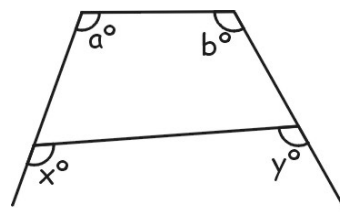


$$\alpha + \beta = \theta + \omega$$

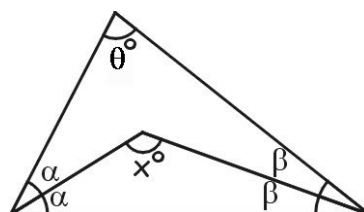
Si $AB < BC < AC$



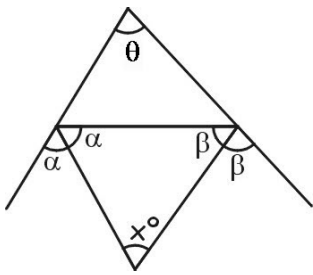
Se cumple:
 $p < PA + PB + PC < AC + BC$



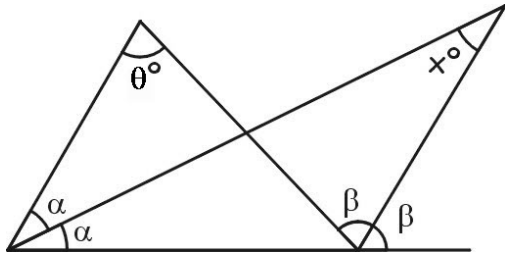
$$a + b = x + y$$



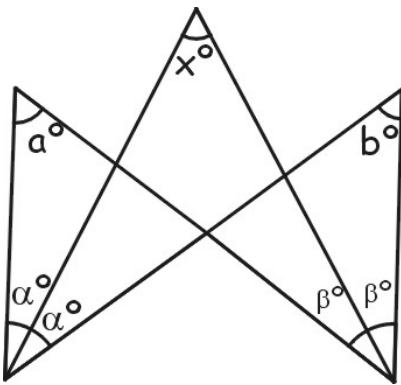
$$x = 90^\circ + \frac{\theta}{2}$$



$$x = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$



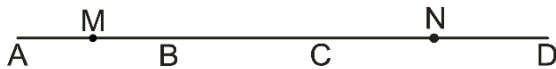
$$x = \frac{\theta}{2}$$



$$x = \frac{a+b}{2}$$

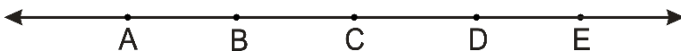
EJERCICIOS DE CLASE

1. En la figura M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Si $BC = 6$ m y $AD = 16$ m. Halle MN.



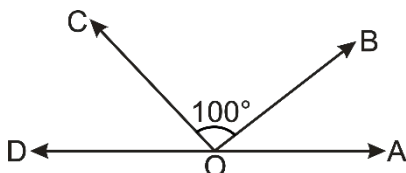
- A) 8 m B) 9 m C) 10 m D) 11 m E) 12 m

2. En la figura se tienen los puntos consecutivos A, B, C, D y E. Si $2AE = 3BD$ y $AC + BD + CE = 45$ m, halle AE.



- A) 21 m B) 23 m C) 25 m D) 27 m E) 29 m

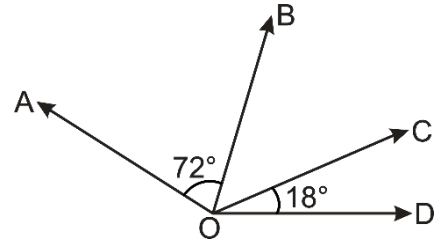
3. En la figura, trazar $\overline{OM}$ Bisectriz del $\angle DOC$ y $\overline{ON}$ bisectriz de $\angle BOA$. Hallar $m\angle MON$.



- A) 130° B) 150° C) 125°
D) 140° E) 120°

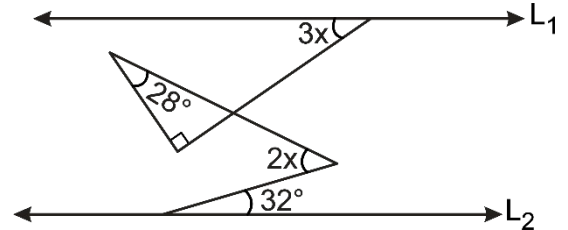
4. En la figura, halle la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos BOC y AOD.

- A) 32°
B) 27°
C) 25°
D) 30°
E) 26°



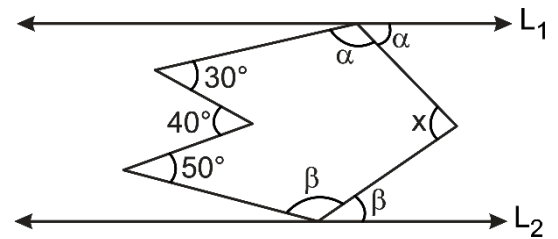
5. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. Halle x.

- A) 30°
B) 45°
C) 50°
D) 40°
E) 60°



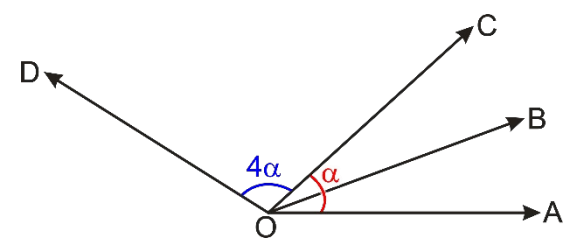
6. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. Halle x.

- A) 160°
B) 170°
C) 150°
D) 140°
E) 130°



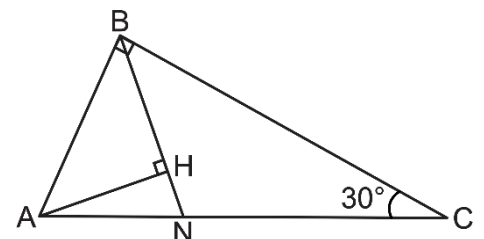
7. En la figura, $m\angle BOD - 4m\angle AOB = 60^\circ$. Halle $m\angle BOC$.

- A) 12°
B) 10°
C) 15°
D) 18°
E) 30°



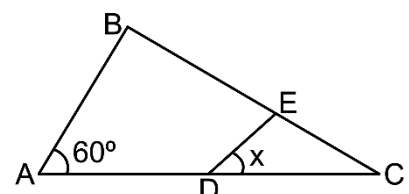
8. En la figura, $AC = 20$ m y $\overline{BN}$ bisectriz del ángulo ABC. Halle BH.

- A) $10\sqrt{2}$ m
B) $5\sqrt{2}$ m
C) $6\sqrt{3}$ m
D) $12\sqrt{2}$ m
E) $8\sqrt{3}$ m



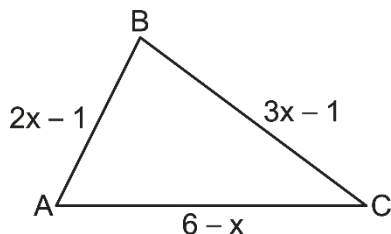
9. En la figura, $AB = AD = BE$ y $m\angle ABE = m\angle BED$. Halle x.

- A) 40°
B) 50°
C) 55°
D) 60°
E) 65°



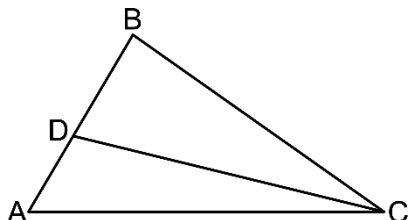
10. En la figura, halle el valor entero de x .

- A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



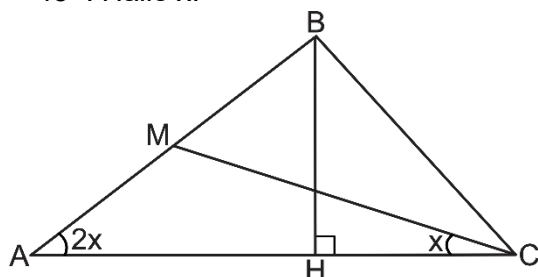
11. En la figura, $BC = 6$ m y $AC = 7$ m. Halle el mayor valor entero de CD .

- A) 6 m
B) 5 m
C) 7 m
D) 8 m
E) 4 m



12. En la figura, $\overline{CM}$ mediana relativa a $\overline{AB}$ y $m\angle ACB = 45^\circ$. Halle x .

- A) 10°
B) 18°
C) 30°
D) 20°
E) 15°



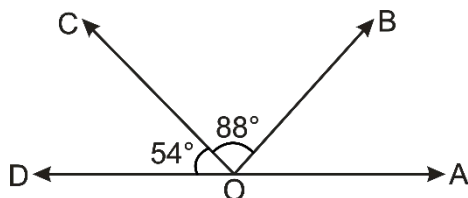
EJERCICIOS DE EVALUACIÓN

1. Dados los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D y E, se ubican los puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ respectivamente. Si $AC = 8$ m, $CE = 10$ m y $AM + DN = 5$ m, halle MN.

- A) 11 m B) 13 m C) 12 m D) 10 m E) 14 m

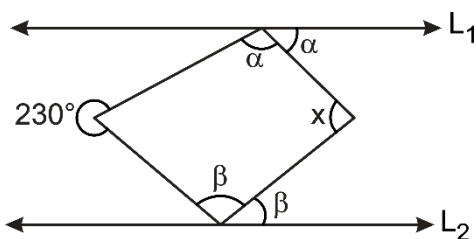
2. En la figura, halle la medida del ángulo que determinan las bisectrices de los ángulos AOC y BOD.

- A) 30°
B) 50°
C) 46°
D) 40°
E) 29°



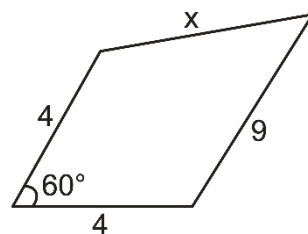
3. En la figura, $L_1 \parallel L_2$. Halle x

- A) 140°
B) 110°
C) 115°
D) 120°
E) 130°



4. En la figura, halle el máximo valor entero de x .

- A) 9 m
B) 10 m
C) 11 m
D) 12 m
E) 13 m



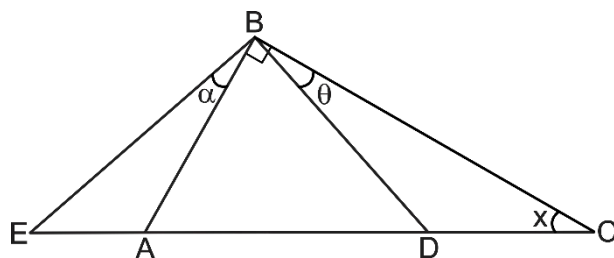
5. Las medidas de los ángulos internos de un triángulo son proporcionales a los números 2, 3, y 5. Calcular la medida del mayor.

- A) 105° B) 75° C) 72° D) 90° E) 108°

6. En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{AQ}$, P es un punto de $\overline{AC}$ tal que $AP = PQ$. Si $m\angle BAQ = 2m\angle QAC$ y $m\angle ACB = 2m\angle ABC$, halle $m\angle PQC$.

- A) 58° B) 75° C) 62° D) 60° E) 64°

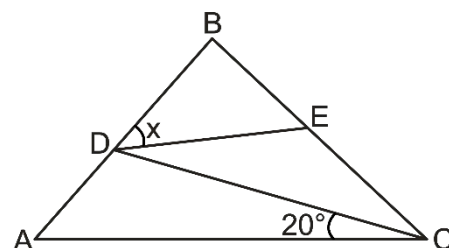
7. En la figura, $\alpha + \theta = 24^\circ$ y $BE = BD$. Halle x .



- A) 29° B) 31° C) 35° D) 53° E) 33°

8. En la figura, $AB = BC$ y $DE = EC$. Halle x .

- A) 20°
B) 40°
C) 10°
D) 30°
E) 60°

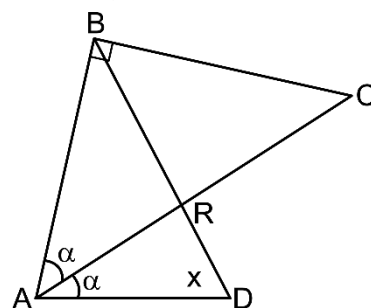


9. En un triángulo rectángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BD}$ y una perpendicular $\overline{CH}$ a la prolongación de $\overline{BD}$. Si $BD = 10$ m, $DH = 6$ y $BD = DC$, halle CH.

- A) 5 m B) 10 m C) 8 m D) 4 m E) 2 m

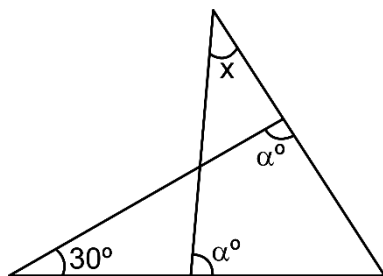
10. En la figura, $BR = BC$, calcular " x "

- A) 80°
B) 85°
C) 90°
D) 95°
E) 100°



11. En la figura, calcule "x"

- A) 15°
- B) 30°
- C) 60°
- D) 45°
- E) 40°



12. En la figura, calcular " θ "

- A) 30°
- B) 36°
- C) 24°
- D) 18°
- E) 22°

