



### LEYES DE EXPONENTES - POLINOMIOS

#### LEYES DE EXPONENTES

**Potenciación:** Operación matemática donde dados dos elementos llamados base (b) y exponente (n), se obtiene un tercer elemento llamado potencia (P).

$$b^n = P$$

Donde  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $b \in \mathbb{R}$  y  $P \in \mathbb{R}$ .

#### Ejemplo:

En  $4^3 = 64$ , la base es 4, el exponente es 3 y la potencia es 64.

#### Definiciones de exponentes:

##### 1. Exponente natural:

$$b^n = \begin{cases} b & ; \text{si } n = 1 \\ \underbrace{b.b.b....b}_{\text{"n" veces}} & ; \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

##### 2. Exponente cero:

$$a^0 = 1; \quad a \neq 0$$

##### 3. Exponente negativo:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a \neq 0$$

Consecuencia

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

#### Ejemplos:

$$\begin{aligned} \checkmark \quad (-4)^4 &= (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = +256 \\ \checkmark \quad (-2)^3 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8 \\ \checkmark \quad (3^4 - 7)^0 &= 1 \\ \checkmark \quad 2^{-4} &= \frac{1}{2^{+4}} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

#### Principales teoremas de Potenciación:

##### 4. Cuando las bases son iguales:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad a \neq 0$$

##### 5. Potencia de potencia:

$$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

##### 6. Exponente común:

$$(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0$$

##### 7. Exponente de exponentes

$$x^{m^n p^q}$$

Estas expresiones se reducen comenzando por los dos últimos exponentes y se continúa con los dos siguientes hasta llegar a la base.

#### Ejemplo:

$$\checkmark \quad 2^{5^6 0^{56}} = 2^{5^6 0} = 2^{5^1} = 2^5 = 32$$

#### ¡Nota importante!

$$\left\{ \left[ (a^m)^n \right]^p \right\}^q \neq a^{m^n p^q}$$

#### Ejemplos:

$$\checkmark \quad 3^{x+2} \cdot 3^{4-x} \cdot 3^{-5} = 3^{x+2+(4-x)+(-5)} = 3^1 = 3$$

$$\checkmark \quad \frac{5^{x+8}}{5^{5+x}} = 5^{x+8-(5+x)} = 5^3 = 125$$

$$\checkmark \quad \left(2^{3^5}\right)^{3^{-5}} = 2^{3^5 \cdot 3^{-5}} = 2^{3^0} = 2^1 = 2$$

**Radicación en R:**  $\sqrt[n]{a} = b$  Si y sólo si  $b^n = a$ .

Donde, si "n" es par, "a" debe ser positivo.

Además:  $n \in \mathbb{N}$  y  $n \geq 2$  ("n" índice); "a" es radicando y "b" es raíz enésima.

#### Principales teoremas de Radicación:

Si las raíces están definidas en  $\mathbb{R}$ .

##### 8. Exponente fraccionario:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m; \quad n \geq 2$$

##### 9. Cuando el índice es común

$$\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$$

##### 10. Raíz de raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}} = \sqrt[mnpq]{a}$$



## Clasificación de las Expresiones Algebraicas

### Según los exponentes de las variables:

- A) E.A. racional entera y fraccionaria (Exponentes enteros)
- B) E.A. irracional (Exponentes fraccionarios)

**2. Polinomio:** Es una expresión algebraica donde los exponentes de las variables son naturales.

#### Ejemplo:

$$P(x) = 4x^7 - 5x + 9$$

Elementos:

- Grado: 7 (mayor exponente de la variable)
- Término independiente: 9
- Suma de coeficientes:  $4 + (-5) + (9) = 8$
- Número de términos: 3 (Trinomio)

### Valor numérico de un polinomio (V.N)

Es el resultado que se obtiene al reemplazar la ó las variables de un polinomio por algún número.

#### Ejemplo:

- Si  $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$   
Para  $x = -2$ , entonces:  
 $P(-2) = 2(-2)^2 + 5(-2) - 3 = -5$

**PROPIEDADES:** Para todo polinomio  $P(x)$

$$\textcircled{1} \quad \boxed{\sum \text{COEFICIENTES} = P(1)}$$

$$\textcircled{2} \quad \boxed{\text{Término Independiente} = P(0)}$$

**Representación general de un polinomio de grado "n" en una sola variable.**

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0};$$

$$a_n \neq 0$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  son los coeficientes;  $x$  es la variable;  $a_n$  es el coeficiente principal (diferente de cero);  $a_0$  es el término independiente.

## POLINOMIOS DE VARIAS VARIABLES

**A. Grado Relativo (G.R.):** Se toma con respecto a una variable y es el mayor exponente de ésta.

#### Ejemplo:

$$P(x, y, z) = \sqrt{13} x^2 y^4 z^5 + 12 x^8 y^7 z - 8 x^5 y z^2$$

$$GR(x) = 8; \quad GR(y) = 7; \quad GR(z) = 5$$

**B. Grado Absoluto (G.A.):** Es la mayor suma de los exponentes de las variables, que aparecen en cada término.

#### Ejemplo:

$$Q(x, y, z) = 4 \underbrace{x^2 y z^8}_{2+1+8=11} + 18 \underbrace{x^5 y^3 z}_{5+3+1=9} - 10 \underbrace{xy^{12}}_{1+12=13}$$

$\therefore$  El G.A. de  $P(x, y, z)$  es 13.

## POLINOMIOS ESPECIALES

**A. Polinomio Mónico:** Es un polinomio cuyo coeficiente principal es 1.

$$\text{Ejemplo: } Q(x) = 6x + 7 - 4x^2 + 9x^3 + x^{12}$$

**B. Polinomio Ordenado:** Se dice que es ordenado respecto a una de sus variables cuando sus exponentes van aumentando o disminuyendo.

**Ejemplo:**  $P(x) = x^{15} + x^{25} - x^{32}$  es un polinomio ordenado en forma creciente.

**C. Polinomio Completo:** Se dice que es completo respecto a una de sus variables si existen todos los términos con sus exponentes desde el 0 hasta  $n$ .

$$\text{Ejemplo: } P(x) = 5x^4 + 3x - 19x^3 + 3x^2 + 9x^5 + 11$$

$$\boxed{\text{Observación: } \# \text{ Términos} = \text{G.A.} + 1}$$

**D. Polinomio Homogéneo:** Es aquel polinomio de mínimo dos variables, cuyos términos tienen el mismo grado absoluto.

$$\text{Ejemplo: } P(x, y, z) = 3x^8 y^5 z^2 - 7x^3 y^8 z^4 + 25xy^{14}$$

$$\therefore \text{Grado de homogeneidad} = 15$$

**E. Polinomios Idénticos:** Dos o más polinomios son idénticos si tienen las mismas variables y para cualquier valor que se le asigne a las variables los resultados son iguales.

$$\text{Observación: } \boxed{P(x) \equiv Q(x)}; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dos polinomios serán idénticos si sus términos semejantes poseen el mismo coeficiente.

$$\text{Ejemplo: Sean: } P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$Q(x) = 4x^2 + 2x^3 - 3x + 7$$

Polinomios idénticos entonces:

$$a = 2, \quad b = 4, \quad c = -3 \quad \text{y} \quad d = 7.$$

**F. Polinomio Idénticamente Nulo:** Un polinomio es idénticamente nulo si para cualquier valor que se le asigne a sus variables el resultado es cero.

Un polinomio es idénticamente nulo si todos sus coeficientes son iguales a cero.

$$\text{Observación: } \boxed{P(x) \equiv 0}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Veamos algunos ejercicios resueltos:

1) Si al polinomio:

$$F(x, y) = nx^m y^p + mx^{m-1} y^{p-3} + x^{n-8}$$

le restamos  $12x^3 y^4$ , su grado absoluto disminuye

¿Cuánto vale el menor exponente de  $F(x, y)$ ?

**SOLUCIÓN:**

Analizando cada término con su grado absoluto G.A.  
(F) = m + p y está dado por el dato por el 1er. término

Del dato: para que el grado absoluto F disminuya al restar  $12x^3y^4$ , implica que el término de mayor grado es  $12x^3y^4$ .

Luego:  $n x^m y^p = 12x^3y^4$  (1er. término)

$$\Rightarrow m = 3 \quad ; \quad p = 4$$

$$\therefore \text{Menor exponente de } F(x, y) = n - 8 = 12 - 8 = 4$$

2) Señale el grado del polinomio entero, sabiendo que está ordenado en forma decreciente.

$$P(x) = x^{12-2a} + x^{2a-4} + x^{4-2a}$$

**Solución:**

Debido a que está ordenado decrecientemente:

$$\begin{array}{ccc} 12-2a & > & 2a-4 & > & 4-2a \\ \hline & (I) & & (II) & \end{array}$$

$$\text{De (I): } 12 - 2a > 2a - 4 \Rightarrow 16 > 4a$$

$$\Rightarrow 4 < a$$

$$\text{De (II): } 2a - 4 > 4 - 2a \Rightarrow 4a > 8 \Rightarrow a > 2$$

$$\text{De donde: } 4 > a > 2 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{Finalmente: G.P.} = 12 - 2(3) = 6.$$

3) Si el polinomio:

$$P(x, y) = 3x^3y^m + 8x^n y^4 + m x^m y^{m+n-6}$$

es homogéneo, hallar el grado del polinomio:

$$Q(x, y) = 2x^{2m}y^{m+n} + 3x^n y^{m+n} - 4x^{3m}$$

**Solución:**

Si  $P(x, y)$  es homogéneo, se debe cumplir:

$$m+3 = n+4 = 2m+n-6$$

$$(I) \quad (II) \quad (III)$$

De (II) y (III)

$$n+4 = 2m+n-6 \Rightarrow 10 = 2m \Rightarrow m = 5$$

$$\text{De (I) y (II): } m+3 = n+4 \Rightarrow 5+3 = n+4$$

$$\Rightarrow n = 4$$

Reemplazando ahora en  $Q(x, y)$

$$Q(x, y) = \underbrace{2x^{10}y^9}_{19^\circ} + \underbrace{3x^4y^9}_{13^\circ} - \underbrace{4x^{15}}_{15^\circ}$$

$$\therefore \text{G.A. } Q(x, y) = 19.$$

**EJERCICIOS DE CLASE**

1. Simplifica

$$M = \frac{2^{2n+1} \cdot 4^{-2n+1} + 8^{-n+2}}{16 \cdot (2^n)^{-3}}$$

$$A) \sqrt{2}$$

$$B) \sqrt{3}$$

$$C) 9/2$$

$$D) 5/2$$

$$E) 7/2$$

2. Simplifique:

$$M = \sqrt[3^{n+1}]{\sqrt[3^{n+2}]{27^{81 \cdot 3^n}}}$$

$$A) \sqrt{3}$$

$$B) \sqrt[3]{3}$$

$$C) 3$$

$$D) 9$$

$$E) 3^N$$

3. Si  $x^y \cdot y^x = 3^{\sqrt{3}}$

$$\text{Calcule } \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

$$A) 1$$

$$B) \sqrt{3}$$

$$C) 3$$

$$D) 2\sqrt{3}$$

$$E) 3\sqrt{3}$$

4. Halle x en  $\sqrt{a^{x-1}} \cdot \sqrt[3]{a^{2x+1}} \cdot \sqrt[4]{a^{1-3x}} = 1$ .

$$A) 4/5$$

$$B) 1/5$$

$$C) 5/4$$

$$D) -1/5$$

$$E) -2/3$$

5. Efectuar  $G = \frac{x^3 \cdot x^5 \cdot x^7 \dots x^{2n+1}}{x^2 \cdot x^4 \cdot x^6 \dots x^{2n}}$ .

$$A) 1$$

$$B) x$$

$$C) x^n$$

$$D) x^{n+1}$$

$$E) x^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

6. Si  $x^x = 2$ , halle el valor de  $\frac{x^{x^x+2x}}{x^{2-x}}$ .

$$A) 1$$

$$B) 2$$

$$C) 8$$

$$D) 4$$

$$E) 6$$

7.  $P(x)$  es un polinomio de 2° grado tal que:

$$P(x) - P(x-1) = -2x$$

$$P(0) = 0$$

Halle la  $\Sigma \text{coef}$  de  $P(x)$

$$A) -3$$

$$B) -2$$

$$C) 1$$

$$D) 2$$

$$E) 4$$

8. Si el término independiente del polinomio  $P(x)$  es  $4a+6$  sabiendo que  $P(x+3) = x^2 - 5x + a$ . Calcula la suma de coeficientes de  $P(x)$

$$A) 12$$

$$B) 15$$

$$C) 16$$

$$D) 18$$

$$E) 20$$

9. Si  $p(x) = (m^m - 13)x^{19} + (n^n + 8)x^{15} + k - 6$  y

$q(x) = 3x^{19} + 35x^{15} + 10 - k$  son idénticos halle el

$$\text{valor de } \frac{m \cdot n + 2}{k}.$$

$$A) 0$$

$$B) 1$$

$$C) 2$$

$$D) 6$$

$$E) 3$$

10. Si el polinomio  $p(x) = (a^6 - 3b + 2c - 19)x^{14} + (2b - c + 8)x^7 + (b - c + 10)$  es idénticamente nulo, halle el valor de  $2a^{12} + 1$ .

A) 7                      B) 1                      C) 2  
D) 6                      E) 3

11. Si el polinomio homogéneo  $M(x, y) = (a - b)x^{a-4}y^{3b-1}(2x^{a-3} + y^{b+5})$  tiene su grado de homogeneidad igual a 28, halle la suma de coeficientes.

A) 16                      B) 8                      C) 10  
D) 12                      E) 24

12. Si el polinomio  $p(x)$  es de grado 8 y  $q(x)$  de grado 3 entonces el polinomio  $\frac{[p(x)]^3 [q(x)]^7}{[q(x)]^5}$  es de grado:

A) 3                      B) 2                      C) 5  
D) 15                      E) 30

### ADICIONALES

1. Sabiendo que:  $P(x; y) = (5x - 3y)^{n+1} + 5n$  es tal que la suma de coeficiente es igual al término independiente aumentado en 1024. Hallar "n".

A) 6                      B) 7                      C) 8                      D) 9                      E) 10

2. Si el trinomio:  $F(x) = \sqrt[n]{x^{a+b}} + \sqrt[n]{x^{b+c}} + \sqrt[n]{x^{a+c}}$  Es homogéneo de grado (10), de qué grado es el monomio.

$$S(x; y; z) = \sqrt[n]{x^a} \cdot \sqrt[n]{y^b} \cdot \sqrt[n]{z^c}$$

A) 7                      B) 13                      C) 27                      D) 33                      E) 30

3. Sean: P; Q dos polinomios dados por:  
 $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$   
 $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$   
Si:  $P_{(x)} \equiv Q_{(x-1)}$ , determinar el valor de:  
 $a + b + c + d$

A) 0                      B) 1                      C) 2                      D) 3                      E) 5

4. Si:  $m + n = 2mn$ ; reducir:  
 $\frac{4^m - 4^n}{\sqrt[n]{2^m} - \sqrt[n]{2^n}}$

A)                      B) 1                      C)                      D) 2                      E) -4

5. Si:  $f_{(x^x)} = x^{x+1} \sqrt{x^{2x+2}}$   
Además:  $f_{(x^x+1)} = 3125$ .  
Calcular:  $P = \sqrt{f(x+2)}$ .

A) 16                      B) 10                      C) 18  
D) 14                      E) 12

6. Calcular:  
 $\sqrt[3]{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{2\sqrt[3]{9}}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{3}} \sqrt[3]{2\sqrt[3]{9}}}$

A) 2                      B)  $\sqrt[3]{2}/2$                       C)  $1/2$   
D) 8                      E)  $\sqrt{2}$

### EJERCICIOS DE CLASE

1. Simplifique  $K = \frac{(30)^4 (14)^2 (20)^5}{(16)^4 (9)^2 (625)^2 (49)}$ .

A) 4                      B) 5                      C) 8  
D) 10                      E) 12

2. Sean

$$M = \frac{\overbrace{\sqrt{xy} \cdot \sqrt{xy} \cdots \sqrt{xy}}^{m+n \text{ factores}}}{\underbrace{4\sqrt{y} \cdot 4\sqrt{y} \cdots 4\sqrt{y}}_{2n \text{ factores}}}$$

y

$$N = \frac{\overbrace{2m\sqrt{x} \cdot 2m\sqrt{x} \cdots 2m\sqrt{x}}^{m \cdot n \text{ factores}}}{\underbrace{x^{-6-1} \cdot x^{-6-1} \cdots x^{-6-1}}_{3m \text{ factores}}}$$

Halle  $\frac{M}{N}$ .

A) 1                      B)  $\sqrt{y}^n$                       C)  $\sqrt{y}$   
D)  $\sqrt{x}^m$                       E)  $\sqrt{y}^m$

3. Si  $x^{x^{x^2}} = x^2 \sqrt{16^{16}}$  con  $x > 0$  determine  $x^3 + 1$ .

A) 2                      B) 4                      C) 65  
D) 28                      E) 9

4. Si el polinomio:  
 $R(x) = x^{m-n} - \sqrt{2} x^{m-8} - \sqrt{3} x^{p-10} + 5x^{p-9}$  es ordenado y completo, determine el valor  $m + n - p$ .

A) 30                      B) 18                      C) 12  
D) 8                      E) 6

5. Si  $p(x) = x^{a-3} + x^{b-4} + x^{c-5} + \dots + x^t + t + 3$  es un polinomio completo y ordenado de 36 términos, halle el valor de  $\left(\frac{b+c}{2a}\right)^t$

A) 3      B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{39}{38}$       D) 2      E) 1

6. Señale el enunciado falso:

A) Un polinomio completo no siempre está ordenado.  
B) Un polinomio ordenado no siempre está completo.  
C) Un polinomio completo de grado 12, siempre tiene 13 términos.  
D) Un polinomio completo no siempre es mónico  
E) Un polinomio completo siempre está ordenado.