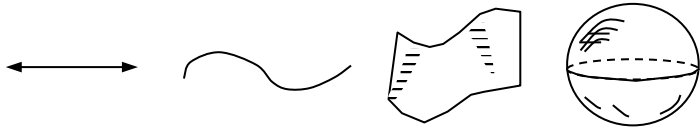


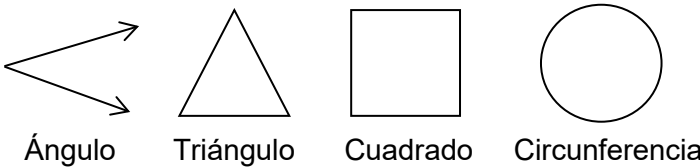
SEGMENTOS Y ÁNGULOS

La Geometría tiene como objeto de estudio las propiedades y relaciones de las figuras geométricas, atendiendo a su forma y tamaño. Empleando para este estudio el método axiomático, que consiste en adquirir conocimientos mediante el razonamiento excluyendo por completo el uso de los sentidos.

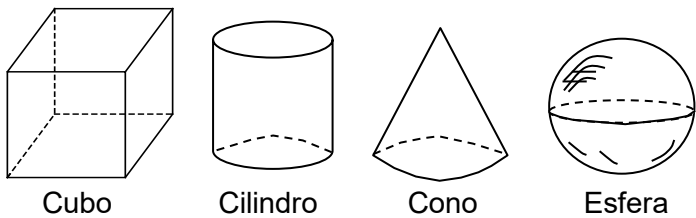
Figura geométrica. Es cualquier conjunto, no vacío, de puntos. Pueden ser figuras planas y sólidas o del espacio.



Figuras planas. Aquellas que tienen todos sus puntos en un mismo plano.



Figuras sólidas o del espacio. Aquellas que no tienen todos sus puntos en un mismo plano.



La geometría se divide en dos partes: geometría plana y del espacio. La geometría plana estudia las figuras planas y la del espacio, estudia las figuras sólidas o el espacio.

CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA. Los conceptos geométricos fundamentales son: el punto, la recta y el plano. Llamados también conceptos primitivos pues no tienen definición; son palabras o términos indefinibles. Todos los conceptos geométricos se definen en base o en función a ellos

El Punto:

- Es un concepto imaginario
- Tiene ubicación
- No tiene longitud: anchura o grosor
- Lo idealizamos al cortarse dos rectas
- Un punto dibujado a diferencia de un punto conceptual, tiene tamaño.

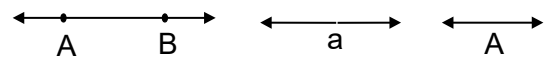
Se designa al punto conceptual por medio de una letra mayúscula junto al punto dibujado o un aspa.

.A .B xC xD

La Recta:

- Es un concepto imaginario
- No se puede medir
- Es ilimitada en ambos sentidos
- La línea recta tiene dirección

Una línea se designa con letras mayúsculas en dos puntos cualesquiera sobre ella o con una letra minúscula. La doble flecha, pone de manifiesto que la línea se extiende indefinidamente en ambos sentidos:

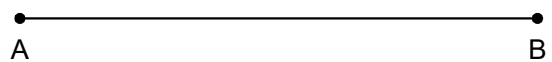


El Plano:

- Es un concepto o ente abstracto, imaginario, indefinible, tan solo se tiene una idea de él.
- No se puede medir
- No tiene espesor
- Superficie plana ilimitada en todo sentido

SEGMENTO DE RECTA

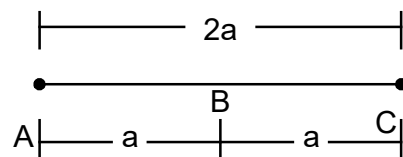
Es una porción de recta limitado por dos puntos denominados extremos.



Se denota por \overline{AB} y se lee segmento AB. La medida de un segmento AB denota por $m\overline{AB}$ o AB, y es un número positivo que compara la longitud del segmento dado con la longitud del segmento unitario (u).

Punto medio de un segmento

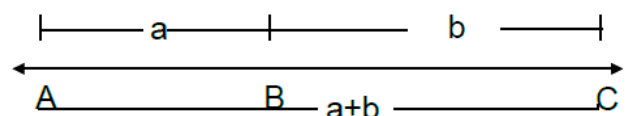
Un punto B se llama punto medio de un segmento \overline{AC} , si B está entre A y C y se verifica que $AB = BC$.



Operaciones con segmentos

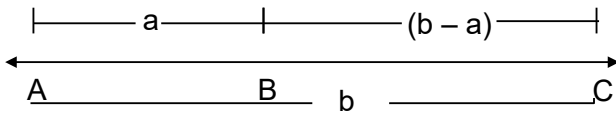
Para sumar dos longitudes de segmentos cualesquiera, se toman en una recta dos segmentos consecutivos cualesquiera y congruentes respectivamente a los segmentos que se quieren sumar.

Suma:



$$AC = AB + BC$$

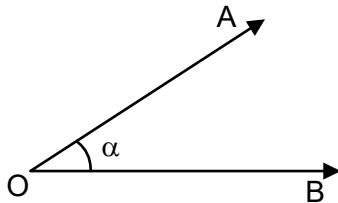
Diferencia:



$$BC = AC - AB$$

ÁNGULO

Figura formada por dos rayos que tienen el mismo punto de origen.



Elementos

Lados: \overline{OA} y \overline{OB}

Vértice: O

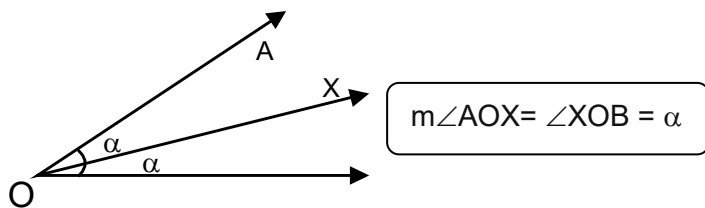
Notación

Ángulo AOB: $\angle AOB$ \sphericalangle AOB \vee $\widehat{A}OB$

Medida del ángulo AOB: $m\angle AOB = \alpha^\circ$

Bisectriz de un Ángulo:

Es el rayo que partiendo del vértice de un ángulo, lo divide en dos ángulos congruentes.



$$m\angle AOX = \angle XOB = \alpha$$

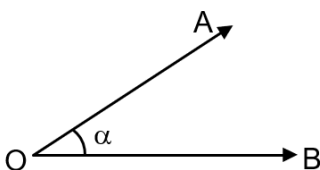
\overline{OX} : Bisectriz del $\angle AOB$

Clasificación de los Ángulos

Los ángulos se clasifican según su medida, por la posición de sus lados y según la relación entre sus medidas.

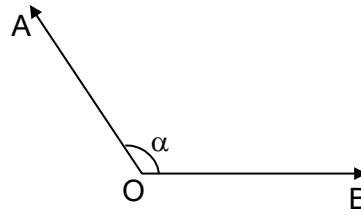
I. Según su medida

1. Ángulo Agudo. Es aquel ángulo cuya medida es menor que 90° pero mayor que 0°



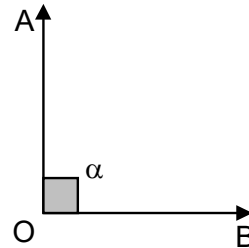
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

2. Ángulo Obtuso: Es aquel ángulo cuya medida es menor que 180° pero mayor que 90°



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

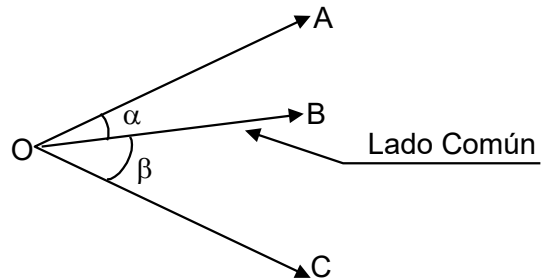
4. Ángulo Recto: Es aquel ángulo cuya medida es igual a 90° .



$$\alpha = 90^\circ$$

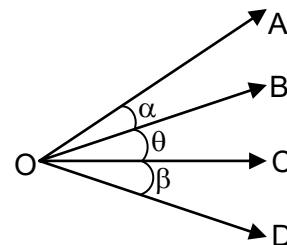
II. SEGÚN LA POSICIÓN DE SUS LADOS

1. Ángulos Adyacentes. Dos ángulos son adyacentes cuando tienen el mismo vértice y un lado común tal que los ángulos se encuentran a uno y otro lado del lado común.

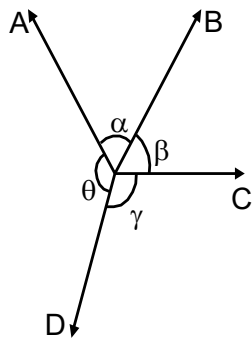


AOB y BOC son ángulos adyacentes, llamado también ángulos consecutivos.

Dos o más ángulos serán adyacentes cuando cada uno de ellos es adyacente con su inmediato.



\widehat{AOB} , \widehat{BOC} y \widehat{COD} son ángulos adyacentes.

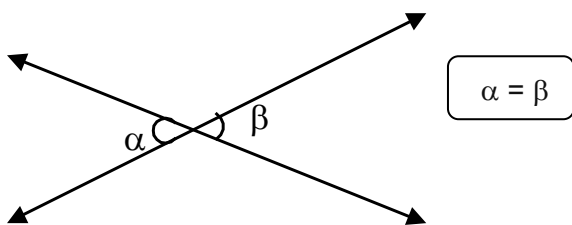


\widehat{AOB} , \widehat{BOC} , \widehat{COD} y \widehat{AOD} son ángulos adyacentes alrededor de un punto

2. Ángulos Opuestos por el Vértice

Son dos ángulos en donde los lados de uno son los rayos opuestos del otro.

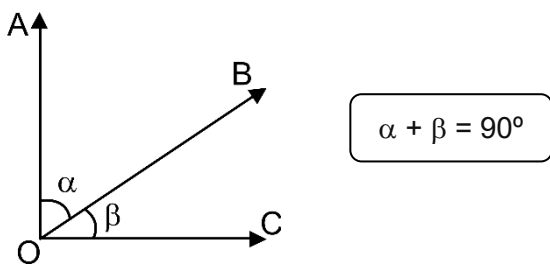
Es decir, se determinan al trazar dos rectas secantes, dichos ángulos con congruentes (tienen la misma medida).



III. Según la relación entre sus medidas

1. Ángulos Adyacentes Complementarios

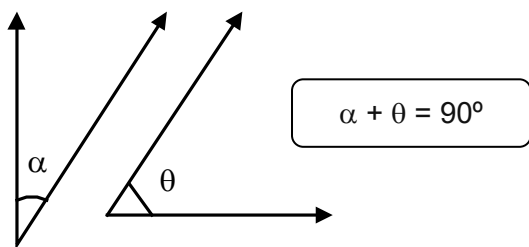
Son dos ángulos adyacentes cuyas medidas suman 90° .



\widehat{AOB} y \widehat{BOC} son ángulos adyacentes complementarios

2. Ángulos Complementarios

Son dos ángulos cuyas medidas suman 90° .



Nota 1. Complemento de un ángulo es lo que le falta a este ángulo para medir 90° .

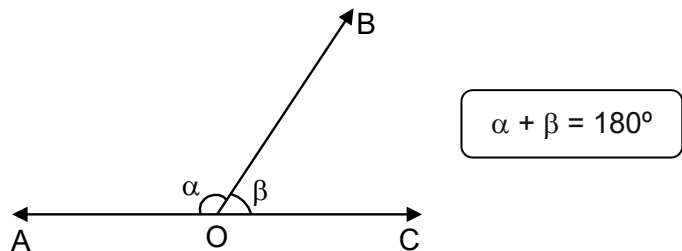
complemento de $\alpha = 90^\circ - \alpha = \theta$

Nota 2:

$1^\circ \leftrightarrow 60'$, $1' \leftrightarrow 60''$
 $90^\circ \leftrightarrow 89^\circ 60' \leftrightarrow 89^\circ 59' 60''$

3. Ángulos Adyacentes Suplementarios

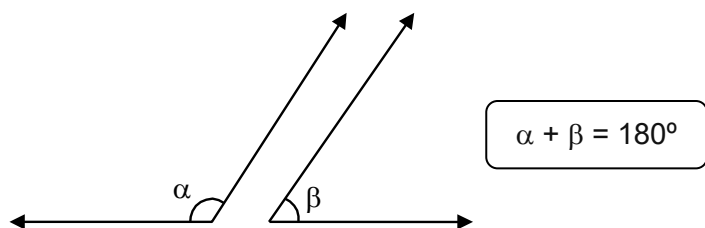
Son dos ángulos adyacentes cuyas medidas suman 180° .



\widehat{AOB} y \widehat{BOC} son ángulos adyacentes suplementarios.

4. Ángulos Suplementarios

Son dos ángulos cuyas medidas suman 180°



Nota 3. Suplemento de la medida de un ángulo es lo que le falta para medir 180° .

suplemento de $\alpha = 180^\circ - \alpha = \beta$

Nota 4:

$180^\circ \leftrightarrow 179^\circ 60' \leftrightarrow 179^\circ 59' 60''$

Nota 5:

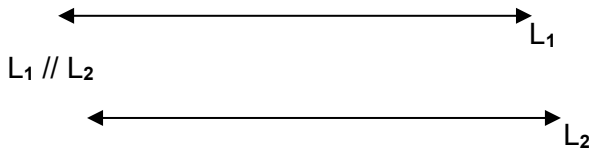
Cuando la palabra suplemento se repite un número par de veces, el resultado es el mismo valor del ángulo y si el número es impar, el resultado es su suplemento.

Sup del Sup Sup de $\alpha = \alpha$
 #ro. par de veces

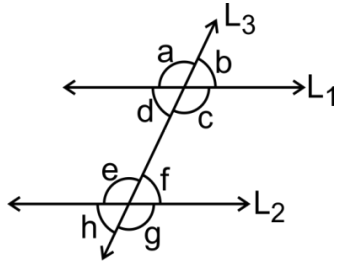
Sup del Sup Sup de $\alpha = 180^\circ - \alpha$
 #ro. impar de veces

ÁNGULOS ENTRE PARALELAS

Paralelas: Se llama rectas paralelas cuando no tienen ningún punto en común y están situados en un mismo plano.



ÁNGULOS FORMADOS POR DOS RECTAS PARALELAS Y UNA SECANTE



1. Ángulos alternos internos:

Los ángulos alternos internos o externos son congruentes.

$$c = e \wedge d = f$$

2. Ángulos alternos externos:

$$a = g \wedge h = b$$

3. Ángulos conjugados internos:

Los ángulos conjugados internos o externos son suplementarios.

$$c + f = 180^\circ \wedge d + e = 180^\circ$$

4. Ángulos conjugados externos

$$b + g = 180^\circ \wedge a + h = 180^\circ$$

5. Ángulos Correspondientes

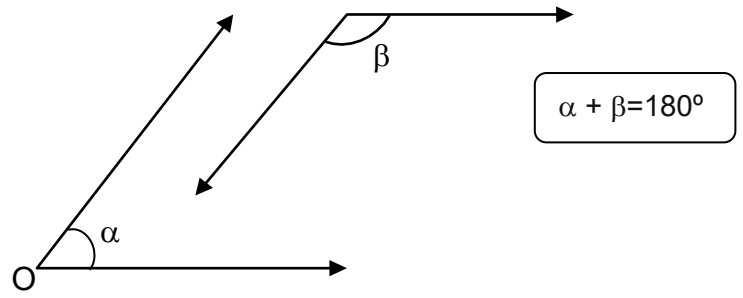
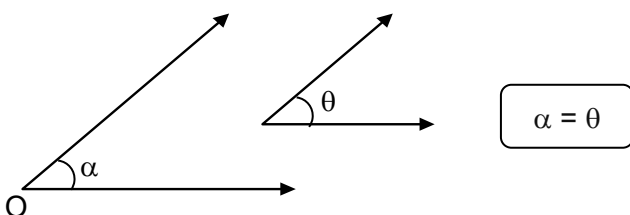
Los ángulos correspondientes son congruentes.

$$a = e \wedge d = h$$

$$b = f \wedge c = g$$

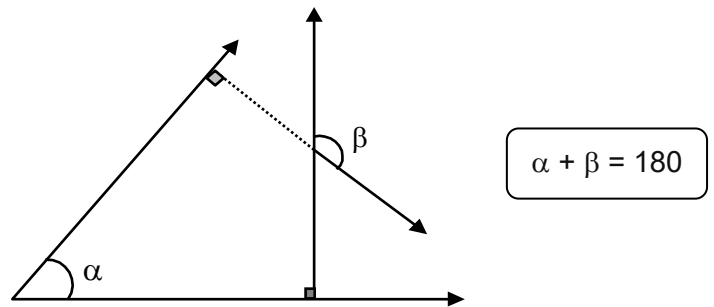
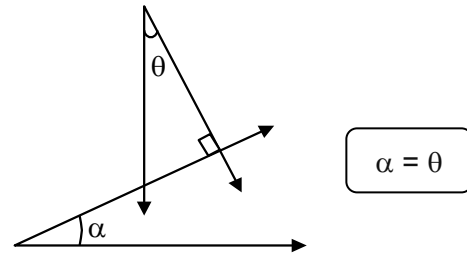
ÁNGULOS DE LADOS PARALELOS

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, serán congruentes cuando ambos ángulos sean agudos o cuando ambos sean obtusos; y serán suplementarios cuando uno de ellos sea agudo y el otro sea obtuso.

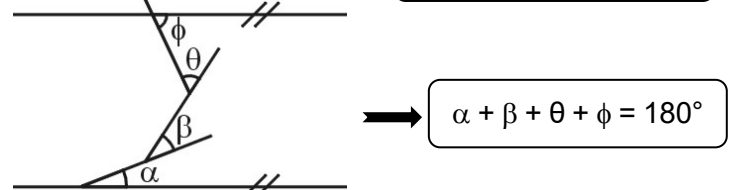
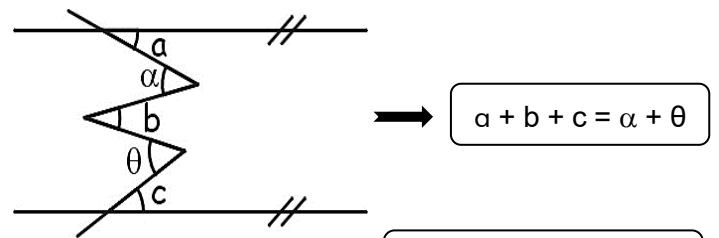
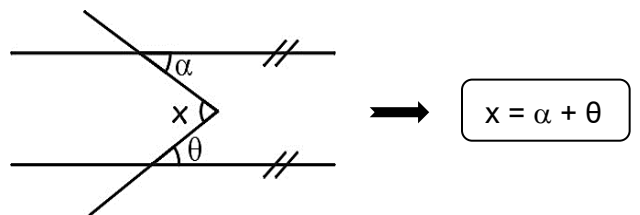


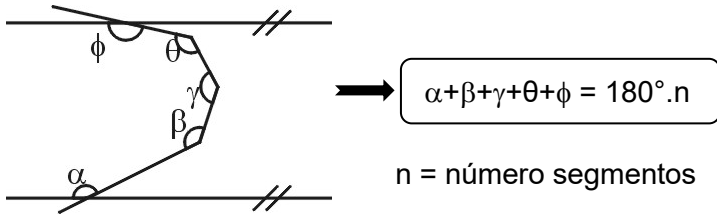
ÁNGULOS DE LADOS PERPENDICULARES

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares serán congruentes cuando ambos sean agudos o cuando ambos sean obtusos; y serán suplementarios cuando uno de ellos sea agudo y el otro obtuso.



PROPIEDADES Si L1 // L2



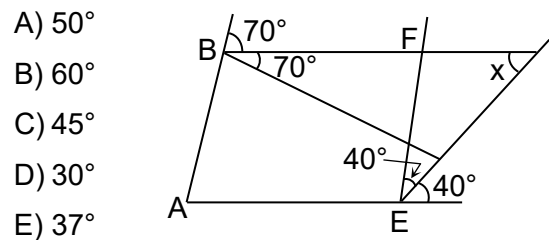


EJERCICIOS DE CLASE

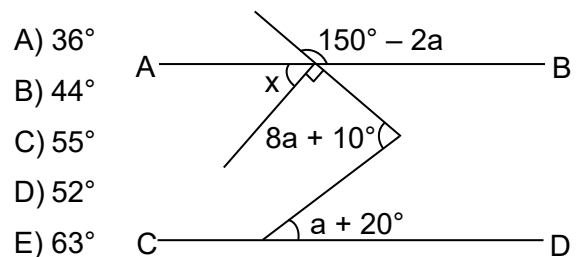
- En una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C y D. Si: $5(BC) = 4(CD)$ y $5(AB) + 4(AD) = 72$ m. Halle AC.
A) 2 cm B) 4 cm C) 5 cm D) 6 cm E) 8 cm
- Sobre una recta se toman los puntos consecutivos: P, B, L, T, E, F. Calcule PF, Si $8BE = 5(PF)$ y $PL + BT + LE + TF = 26$ m.
A) 11 m B) 12 m C) 13 m D) 14 m E) 16 m
- En una recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C y D tales que $AC = 56$ m y $BD = 72$ m. Si M y N son puntos medios de \overline{AB} y \overline{CD} respectivamente, calcular MN.
A) 64 m B) 68 m C) 70 m D) 72 m E) 78 m
- En una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C y D. Si AB es la media aritmética de AC con CD y numéricamente se cumple que $BD^2 + 1 = 2BD$, calcular AD en metros.
A) 2 m B) 1,8 m C) 1,5 m
D) 1 m E) 0,5 m
- En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C tal que: $AC = 90$ m, $AB = 2x + y$, $BC = x - 2y$. Calcule el mayor valor entero de x.
A) 35 m B) 53 m C) 54 m D) 45 m E) 63 m
- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, de tal manera que el AOD es un ángulo llano. Luego se trazan las bisectrices OX del ángulo BOC, OY del ángulo XOD y OZ del ángulo AOC. Calcular la $m\angle BOC$, si además la $m\angle YOZ = 80^\circ$.
A) 31° B) 40° C) 52° D) 64° E) 75°
- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, de modo que: $m\angle AOB + m\angle COD = 45^\circ$. Calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOC y BOD.
A) 15° B) $22^\circ 30'$ C) 45°
D) $26^\circ 30'$ E) 30°

- En la región interior al ángulo AOB, se toma el punto "P" y se traza PE, PF y PM; perpendiculares a OA, OB y a la bisectriz respectivamente. Hallar AOB, si: $5m\angle MPF = 2m\angle EPF$.
A) 41° B) 50° C) 62° D) 74° E) 80°
- Un ángulo obtuso ha sido dividido en 3 ángulos parciales mediante dos rayos, siendo 34° y 43° las medidas de dos de ellos. Calcule el valor de la razón aritmética entre el máximo y mínimo valor entero de la medida del tercero.
A) 88° B) 89° C) 90° D) 91° E) 92°
- El suplemento de la diferencia que existe entre el suplemento y el complemento de la medida de un ángulo es igual al duplo del complemento de dicho ángulo. Calcule la medida de dicho ángulo.
A) 20° B) 45° C) 55° D) 60° E) 85°

- En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$. Calcule x.



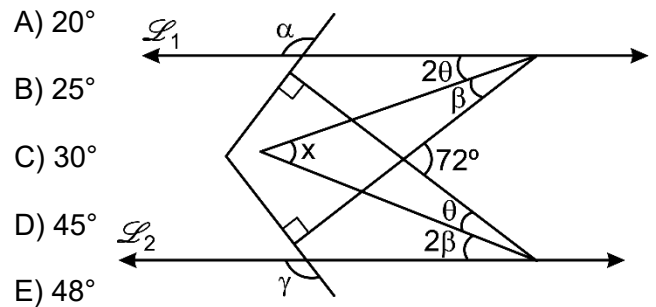
- En la figura $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Calcule x.



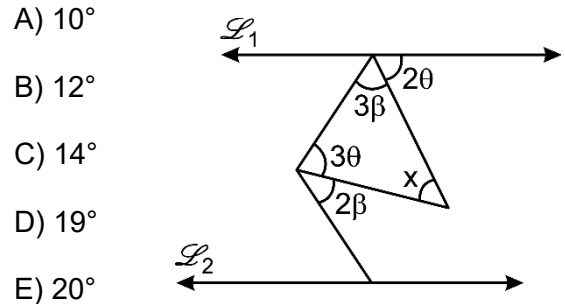
- EJERCICIOS DE EVALUACIÓN**
- En una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C, y D tales que $AC = 12$ cm, $BD = 18$ cm. Halle la longitud del segmento que une los puntos medios de \overline{AB} y \overline{CD} .
A) 10 cm B) 15 cm C) 16 cm
D) 18 cm E) 20 cm
 - Sobre una recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C; siendo M punto medio de AB. Si $AB \cdot MC = AC \cdot BC$ y $AB = 8$ cm. Halle BC.
A) $4\sqrt{2}$ cm B) 3 cm C) 5 cm
D) 6 cm E) $7\sqrt{2}$ cm

3. Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C, D y E; tal que $AC + BD + CE = 32$ m; $5BD = 3AE$. Halle AE.
- A) 17 m B) 7 m C) 20 m
D) 22 m E) 25 m
4. Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C y D tal que $AB = 3$ m, $CD = 1$ m. Halle la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de \overline{AC} y \overline{BD} .
- A) 0,5 m B) 1 m C) 1,5 m
D) 2 m E) 2,5 m
5. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tal que $4AB \cdot CD = BC \cdot AD$ y $\frac{1}{10} = \frac{4}{AD} + \frac{1}{AB}$. Halle AC.
- A) 34 B) 35 C) 36 D) 48 E) 50
6. La medida de un ángulo es x. Si la diferencia entre los $\frac{5}{6}$ del suplemento de x y el complemento de la mitad de la medida de dicho ángulo excede en $\frac{x}{15}$ al doble del complemento de x. Halle el suplemento del complemento de x.
- A) 120° B) 130° C) 165° D) 170° E) 178°
7. Sea x la medida de un ángulo. El complemento de la diferencia entre el suplemento de x y su complemento de x es igual a los $\frac{4}{5}$ de la diferencia que existe entre el suplemento de x y el suplemento del suplemento de x. Halle el suplemento del complemento de x.
- A) 80° B) 90° C) 110° D) 180° E) 175°
8. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD; además los rayos OM y ON son bisectrices de los ángulos AOB y COD, respectivamente. Halle $m\angle AOC$, $m\angle MON = \alpha$ y $m\angle AOC - m\angle BOD = \beta$.
- A) $2\alpha + \frac{\beta}{2}$ B) $3\alpha + \frac{\beta}{2}$ C) $\alpha + \frac{3\beta}{2}$
D) $\alpha - \frac{\beta}{2}$ E) $\alpha + \frac{\beta}{2}$
9. Sean los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, donde $m\angle AOD = 120^\circ$ y $m\angle BOC = 80^\circ$. Se trazan los rayos \overline{OM} y \overline{ON} bisectrices de los ángulos AOB y COD respectivamente. Luego se trazan las bisectrices \overline{OP} y \overline{OQ} de los ángulos AON y MOD respectivamente, halle la $m\angle POQ$.
- A) 10° B) 14° C) 20° D) 25° E) 27°

10. En la figura, $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$, Halle x



11. En la figura, $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$, el ángulo ABC es agudo, halle el mínimo valor entero de x.



- A) 10°
B) 12°
C) 14°
D) 19°
E) 20°