LEYES DE EXPONENTES

Potenciación: Operación matemática donde dados dos elementos llamados base (b) y exponente (n), se obtiene un tercer elemento llamado potencia (P).

$$\boxed{b^n = P}$$

Donde $n \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{R}$ y $P \in \mathbb{R}$.

Ejemplo:

En $4^3 = 64$, la base es 4, el exponente es 3 y la potencia es 64.

Definiciones de exponentes:

1. Exponente natural:

$$b^n = \begin{cases} b & ;\text{si } n = 1 \\ \underbrace{b.b.b.....b}_{\text{"n" veces}} & ;\text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

2. Exponente cero:

$$\boxed{a^0 = 1;\quad a \neq 0}$$

3. Exponente negativo:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0}$$

Consecuencia

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n,\ a \neq 0,\ b \neq 0}$$

Ejemplos:

- ✓ $(-4)^4 = (-4).(-4).(-4).(-4) = +256$
- ✓ $(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = -8$
- ✓ $(3^4-7)^0 = 1$
- ✓ $2^{-4} = \frac{1}{2^{+4}} = \frac{1}{16}$

Principales teoremas de Potenciación:

4. Cuando las bases son iguales:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \qquad \boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};\quad a \neq 0}$$

5. Potencia de potencia:

$$\boxed{(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m \cdot n}}$$

6. Exponente común:

$$\boxed{(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n} \qquad \boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b \neq 0}$$

7. Exponente de exponentes

$$\boxed{x^{m^{n^{p^q}}}}$$

Estas expresiones se reducen comenzando por los dos últimos exponentes y se continúa con los dos siguientes hasta llegar a la base.

Ejemplo:

- ✓ $2^{5^{6^{0^{56}}}} = 2^{5^{6^0}} = 2^{5^1} = 2^5 = 32$

¡Nota importante!

$$\boxed{\left\{\left[\left(a^m\right)^n\right]^p\right\}^q \neq a^{m^{n^{p^q}}}}$$

Ejemplos:

- ✓ $3^{x+2}.3^{4-x}.3^{-5} = 3^{x+2+(4-x)+(-5)} = 3^1 = 3$
- ✓ $\frac{5^{x+8}}{5^{5+x}} = 5^{x+8-(5+x)} = 5^3 = 125$
- ✓ $\left(2^{3^5}\right)^{3^{-5}} = 2^{3^5.3^{-5}} = 2^{3^0} = 2^1 = 2$

Radicación en R: $\boxed{\sqrt[n]{a} = b}$ Si y sólo si $b^n = a$.

Donde, si "n" es par, "a" debe ser positivo.

Además: $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$ ("n" índice); "a" es radicando y "b" es raíz enésima.

Principales teoremas de Radicación:

Si las raíces estas definidas en $\mathbb{R}$.

8. Exponente fraccionario:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m;\quad n \geq 2}$$

9. Cuando el índice es común

$$\boxed{\sqrt[n]{a.b.c} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0}$$

10. Raíz de raíz

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}}} = \sqrt[mnpq]{a}}$$

Ejemplos:

- ✓ $\sqrt[3]{-125} = -5$ porque $(-5)^3 = -125$
- ✓ $\sqrt[3]{4}.\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8} = 2$
- ✓ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{m^7}}} = \sqrt[24]{m^7} = m^{\frac{7}{24}}$

FORMAS DETERMINADAS

$$\sqrt[m]{x^a\cdot\sqrt[n]{x^b\cdot\sqrt[p]{x^c}}}=\sqrt[mnp]{x^{[(a\cdot n+b)p]+c}}=x^{\frac{[(a\cdot n+b)p]+c}{mnp}}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{x^{n-1}.\sqrt[n]{x^{n-1}....\sqrt[n]{x^{n-1}}}}}_{\text{"n" radicales}}=\sqrt[n-1]{x^{n^n-1}}$$

$$\underbrace{\sqrt[m]{x^p.\sqrt[m]{x^p....\sqrt[m]{x^p}}}}_{\text{"n" radicales}}=\sqrt[m^n]{x^{\frac{p(m^n-1)}{m-1}}}$$

FORMAS INDETERMINADAS

$$\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot\sqrt[n]{x\cdot\ldots\infty\text{rad}}}}=\sqrt[n-1]{x}$$

$$\sqrt[n]{\frac{x^m}{\sqrt[n]{\frac{x^m}{\ldots\infty\text{rad}}}}}=\sqrt[n+1]{x^m}$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

01. Si las bases son iguales, los exponentes deben ser iguales:

$$\text{Si } a^x=a^y\Rightarrow x=y$$

Las bases deben ser positivas y diferentes de uno.

02. Si los exponentes son iguales, las bases deben ser iguales (para bases positivas)

$$\text{Si: } e^x=z^x\ \Rightarrow\ e=z$$

03. Por Analogía:

$$\text{si: } x^{x^{x+x^x}}=a^{a^{a+a^a}}\Rightarrow x=a$$

Importante: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$

04. Expresiones ilimitadas:

$$\text{si: } x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\infty}}}}}=n\ \Rightarrow\ x=\sqrt[n]{n}$$

Ejemplo:

✓ En $125^{x+2}=25^{3-x}$. Calcule "x"

Resolución:

$$(5^3)^{x+2}=(5^2)^{3-x}\rightarrow 5^{3x+6}=5^{6-2x}$$
$$\rightarrow 3x+6=6-2x$$
$$\rightarrow x=0$$

Veamos algunos ejercicios resueltos:

1) El valor de "x" en la igualdad:

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=2$$

Solución:

Haciendo: $E=\overbrace{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}^{\text{"E"}}=2$

Se observa que: E = x^E = 2; pero E = 2

Luego: E = x^2 = 2

Donde $x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}$

2) Efectuar :

$$H=\left(\frac{\overbrace{z.z.z.z.z.\ldots.z}^{(3n+6)\text{ veces}}}{\underbrace{z.z.z.z.z.\ldots.z}_{(4n-2)\text{ veces}}}\right)\left(\frac{\overbrace{z.z.z.\ldots.z}^{(n+3)\text{ veces}}}{z^6}\right)^2\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right)$$

Solución:

Apliquemos el criterio de la potenciación

$$\left(\frac{z^{3n+6}}{z^{4n-2}}\right)\left(\frac{z^{n+3}}{z^6}\right)^2\left(\frac{1}{z^{n+2}}\right)=z^{-n+8}z^{2n-6}z^{-n-2}$$

$H=z^0=1$

3. Calcule:

$$E=\left[\sqrt[\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}}]{\sqrt[\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}]{\sqrt[\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}]{\sqrt[\sqrt[3]{3}]{3^{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}}}}}}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

Solución:

Llevamos la expresión a su forma exponencial:

$$E=3^{\frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\times\sqrt[3]{3}}\right]}$$

$$E=3^{\frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}\times\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\times\sqrt[3]{3}}\right]}$$

$$E=3^{\frac{1}{3}}\ \Rightarrow\ E=\sqrt[3]{3}$$

EJERCICIOS DE CLASE

1. Calcular el valor de:

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left[\frac{2}{5}\right]^{-2}+\left[\frac{4}{7}\right]^{-1}\right\}^{0,5}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

2. Al reducir la expresión:

$$\frac{(x^2)^3\cdot x^{2^4}\cdot x^{-2^3}}{x^{-4^2}\cdot x^{(-3)^2}\cdot x^{12}};\ x\neq 0$$

Se obtiene x^n, entonces. ¿Cuál es el valor de $n+3$?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 16

3. Calcular

$$\left[\frac{2^{29}\times(3^{23})^2}{3^{45}\times(2^{14})^2}\right]\times\left[\frac{(6^4)^{-7}}{(6^{-3})^8}\right]^{10}\times 6^{40}$$

A) 1 B) 3 C) 4 D) 6 E) 12

4. Simplificar:

$$\frac{2^{n+3}+2^{n+2}+2^n}{9\cdot 2^n+2^{n+2}};\ \forall n\in\mathbb{Z}\ \text{y}\ n\geq 1999$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 2n E) $2n+1$

5. Al reducir

$$\sqrt[a^a]{\frac{72^{a^a+1}}{8^{a^a+2}+2^{3(a^a+1)}}},\ a\in\mathbb{N}.$$

Se obtiene

A) 7 B) 8 C) 9 D) 4 E) 6

6. Muestre el exponente final de "a", luego de transformar: $\dfrac{\sqrt[x]{a^{3x+y}}\cdot\sqrt[2x]{a^{x-4y}}}{\sqrt[3x]{a^{5x-3y}}}$

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{13}{6}$ C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{11}{6}$ E) $\frac{21}{4}$

7. Calcular el valor de "x":

$$\sqrt[10]{\frac{2^{2x}+2^{76}}{2^{2x}+2^{56}}}=2$$

A) 20 B) 36 C) 34 D) 23 E) 33

8. Hallar el valor de x^x, al resolver: $2^{2x^3-16}+4^2=17$

A) 8 B) 2^{-1} C) $\frac{1}{8}$ D) 4 E) 6

9. El cesio 137 es un elemento radiactivo usado en aplicaciones médicas. Si se desintegra según $10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$ en gramos, donde t es el tiempo en años y h es la vida media del cesio 137, ¿cuántos años deben pasar para que quede 2,5 gramos de cesio 137, con una Vida media de 30 años?

A) 20 años B) 60 años C) 15 años
D) 50 años E) 70 años

10. Si $x^x=2$. Calcular el valor de:

$$x^{x^{1+2.x^{1+x}}}$$

A) 2^{16} B) 2^{15} C) 2^{-16} D) 2^{-15} E) -2^{16}

11. Calcular:

$$\frac{10^8+10^6+10^4}{10^6+10^4+10^2}-\frac{12^4+12^2}{12^3+12}$$

A) 74 B) 88 C) 39 D) 41 E) 72

12. ¿Cuál es el valor de n si se sabe que

$$4^n+4^n+4^n+4^n=4^{2012}?$$

A) 1006 B) 2010 C) 503 D) 2013 E) 2011

13. Resolver: $2^{x^2-4x+4}=3^{12+x^2-8x}$. Dar como respuesta:

$$7\cdot\left[\frac{11}{x+5}\right]$$

A) 7 B) $\frac{77}{6}$ C) 11 D) $\frac{6}{5}$ E) $\frac{14}{15}$

14. Resolver:

$$x^{x^3}=2^{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\sqrt[3]{2}$
D) $\sqrt[3]{4}$ E) $\frac{4}{3}$

EXÁMENES OTS UNIV

1. Si x es positivo, simplificar la expresión:

$$\frac{\sqrt[\frac{1}{2}]{x\sqrt[\frac{2}{3}]{x\sqrt[\frac{3}{4}]{x\sqrt[\frac{4}{5}]{x\ldots\sqrt[\frac{n}{n+1}]{x}}}}}}{\sqrt{x^{n^2+3n}}}$$

A) $x^{1/2}$ B) x^n C) x^2 D) x E) 1

2. Luego de resolver $x^{(x-1)^2}=2x+1\ /\ x>0$ indique el valor de $\left(x^{\sqrt{2}-1}\right)^x$

A) $3+2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$
D) $1-\sqrt{2}$ E) $3-2\sqrt{2}$

3. Si se cumple las igualdades

$$x^{x^9}=\sqrt{3^{\sqrt{3}}}\ ;\quad y=x^{\left[\frac{1}{y^{y^x}}\right]}$$

Calcule y^{3x}.

A) 3 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) 27

4. ¿Qué valor debe tomar "m" para que se verifique la igualdad: $\sqrt{(0,1)^{-m}\cdot\sqrt{(0,01)^{-2m}\cdot\sqrt{0,001}}}=10$?

A) $\frac{11}{8}$ B) $-\frac{11}{15}$ C) $\frac{11}{12}$ D) $\frac{12}{11}$ E) $-\frac{11}{12}$

EJERCICIOS DE EVALUACIÓN

1. Simplifique:

$$E=\frac{2^{x+5}-2(2^{x+3})-4(2^{x+1})-6(2^{x-1})}{2^{x+4}+36(2^{x-2})}$$

A) 3 B) 3^{-1} C) 5 D) 5^{-1} E) 7

2. Calcular: $M=\dfrac{8^{-3^{-3^0}}+(9^{-1})^{2^{-2^0}}}{125^{-3^{-1}}-36^{-0,5}}$

A) 6 B) 3 C) 25 D) 1/6 E) 1

3. Reducir: $M=\dfrac{\sqrt{a}\,.\sqrt[3]{a}\,.\sqrt[4]{a}}{\sqrt[12]{a}}$

A) a – 1 B) $(a-1)^{-1}$ C) a
D) a^{-1} E) a + 1

4. Resuelve: $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-162}=x^{x^{x+1}}$

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 9

5. Resolver: $\left(2^{-4^{-2}}\right)^x=4^{-2^{-4}}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 1/2 E) 1/4

6. Resolver: $x^{2x^{2x^2}}=3^{27}$ y $x>0$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 3 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. Resuelve: $\sqrt[3x]{\sqrt[81]{27}}=3$

A) 2/3 B) 3/4 C) 4/3 D) 3/2 E) 1/3