LÓGICA PROPOSICIONAL

La lógica es una disciplina que se utiliza para determinar si un argumento es válido, tiene aplicación en todos los campos del saber.

I. ENUNCIADO

Es cualquier frase u oración que expresa una idea.

II. PROPOSICIÓN

Son oraciones aseverativas que se pueden calificar como verdaderas o falsas. Se representan con las letras minúsculas del abecedario: p; q; r; s.

Ejemplo:

- Galileo Galilei murió decapitado.
- 19 < 10
- 12 y 13 son números primos entre sí.

III. ENUNCIADO ABIERTO.

Son enunciados que pueden tomar cualquiera de los 2 valores de verdad.

Ejemplo:

Si: $P(x)$: $x > 7$. Se cumple que:
$P(9)$: $9 > 7$ es verdadero
$P(2)$: $2 > 7$ es falso

El valor de verdad de $P(x)$ depende del valor de x, también, se le conoce como función proposicional.

IV. CLASES DE PROPOSICIONES:

1. Proposición Simple

Son proposiciones que no tienen conjunciones gramaticales ni adverbio de negación.

Ejemplo: Cincuenta es múltiplo de diez.
21 y 22 son primos entre si.

2. Proposición Compuesta

Formada por dos o más proposiciones simples unidas por conectivos lógicos o por el adverbio de negación.

Ejemplo: 29 es un número primo y 5 es impar.
Carlos no es Ingeniero Civil
18 y 34 son números pares

V. CONECTIVOS LÓGICOS:

CONECTIVOS LÓGICOS: Símbolos que enlazan dos o más proposiciones simples para formar una proposición compuesta. Los conectores lógicos que usaremos son:

SÍMBOLO	OPERACIÓN LÓGICA	SIGNIFICADO
$\sim$	Negación	No p
$\wedge$	Conjunción	p y q
$\vee$	Disyunción	p o q
$\rightarrow$	Condicional	Si p, entonces q
$\leftrightarrow$	Bicondicional	p si y sólo si q
Δ	Disyunción Exclusiva	“o … o …”

VI. OPERACIONES LÓGICAS Y TABLAS DE VERDAD

La validez de una proposición compuesta depende de la validez de las proposiciones simples que la componen.

OBSERVACIÓN:
La cantidad de filas en una tabla es: $\boxed{\#\text{ filas} = 2^n}$

Donde n es la cantidad de proposiciones simples.

Veamos una tabla simplificada:
Trabajaremos con 2 proposiciones simples: p y q, por lo tanto se tendrán 4 filas

p	q	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$	Δ	$\sim p$	$\sim q$
V	V	**V**	**V**	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**
V	F	**F**	**V**	**F**	**F**	**V**	**F**	**V**
F	V	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**	**F**
F	F	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**	**V**	**V**

IMPORTANTE:

- Cuando los valores del operador principal son todos verdaderos se dice que el esquema molecular es ***tautológico***.
- Se dirá que el esquema molecular es ***contradictorio*** si los valores del operador principal son todos falsos.
- Si los valores del operador principal tienen por lo menos una verdad y una falsedad se dice que es ***contingente o consistente***.

VII. LEYES DE ÁLGEBRA PROPOSICIONAL

Son equivalencias lógicas que nos permiten reducir esquemas moleculares complejos y expresarlos en forma más sencilla. Las demostraciones de dichas leyes se hacen construyendo la tabla de verdad en cada caso.

PRINCIPALES LEYES:

a. Ley de Idempotencia:

$p \wedge p \equiv p$
$p \vee p \equiv p$

b. Ley Conmutativa:

$p \vee q \equiv q \vee p$
$p \wedge q \equiv q \wedge p$

c. Ley Asociativa:

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

d. Ley Distributiva:

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

e. Ley de la Doble Negación:
$\sim(\sim p) \equiv p$

f. Leyes de Identidad:

$p \vee V \equiv V$; $p \vee F \equiv p$
$p \wedge V \equiv p$; $p \wedge F \equiv F$

g. Leyes del Complemento:

$p \vee \sim p \equiv V$
$p \wedge \sim p \equiv F$

h. Ley del Condicional:
$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

i. Ley de la Bicondicional:

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
$p \leftrightarrow q \equiv \sim (p \,\Delta\, q)$

j. Ley de Absorción:

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$
$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

k. Leyes de "De Morgan":

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

VIII. CUANTIFICADORES:

1. Cuantificador Universal: Sea la función proposicional sobre un conjunto A, el cuantificador ("para todo") indica que todos los valores del conjunto A hacen que la función proposicional sea verdadera.

$\boxed{\forall \text{ se lee : "para todo"}}$

Ejemplo:
Sea: $f(x): x^3 + 2 > 5$ donde $x \in \mathbb{N}$
La proposición cuantificada es:
$\forall\, x \in N;\, x^3 + 2 > 5$ es falsa.

2. Cuantificador existencial: Sea una función proposicional sobre un conjunto A el cuantificador (existe algún) indica que para algún valor del conjunto A, la función proposicional es verdadera.

$\boxed{\exists \text{ se lee : "Existe algún"}}$

Ejemplo:
Sea f(x): $x^2 - 5 < 8$, donde: $x \in \mathbb{Z}^+$, la proposición: $\exists\, x \in \mathbb{Z}^+ \,/\, x^2 - 5 < 8$ es verdadera.

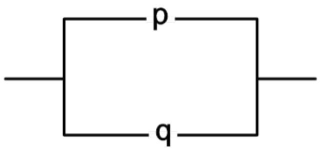
IX. CIRCUITOS LÓGICOS

Un circuito conmutador puede estar solamente en dos estados estables: cerrado o abierto, así como una proposición puede ser verdadera o falsa, entonces podemos representar una proposición utilizando un circuito lógico:

1. Circuito Serie:
Dos interruptores conectados en serie representan una conjunción.

— p — q — < > $p \wedge q$

2. Circuito Paralelo:
Dos interruptores conectados en paralelo representan una disyunción.



< > $p \vee q$

EJERCICIOS DE CLASE

1. Sean las proposiciones
   p: Julio postula a la UNTELS
   q: Julio postula a otra universidad
   t: Julio es un comerciante

   Halle la expresión simbólica del siguiente enunciado

   "Si Julio decide no postular, entonces sería un comerciante, pero, si Julio no es un comerciante, entonces postulará a alguna universidad".

   A) $(\sim(p \vee q) \to t) \vee (\sim t \to (p \vee q))$
   B) $(\sim(p \wedge q) \to t) \wedge (\sim t \to (p \vee q))$
   C) $((p \vee q) \to t) \wedge (\sim t \to (p \wedge q))$
   D) $(\sim(p \wedge q) \to \sim t) \vee (t \to (p \vee q))$
   E) $((\sim p \wedge \sim q) \to \sim t) \wedge (\sim t \to (p \wedge q))$

2. Para el siguiente esquema molecular

   $$[\sim p \to (p \wedge q)] \wedge [\sim q \to (q \wedge \sim p)]$$

   en la columna resultante obtenemos

   A) VVFF B) VFFF C) VFFV
   D) FVFV E) FVFF

3. La validez del siguiente esquema molecular

   $$[(\sim p \wedge \sim q) \vee r] \to (p \to q)$$

   es falsa, halle el valor de verdad de p, q y r, respectivamente.

   A) VVV B) FVV C) VFV D) VVF E) FVF

4. Si el valor de verdad de la proposición $[\sim p \to (p \vee q)]$ es falsa, halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   I. $\sim[\sim p \vee (\sim q \to \sim p)]$
   II. $[(\sim p \to \sim q) \vee (p \triangle q)]$
   III. $[(\sim p \leftrightarrow q) \to (p \vee q)]$

   A) FFV B) VVF C) VFV D) FVV E) FVF

5. Simplifique

   $$[\sim p \wedge (p \to \sim q)] \wedge [\sim p \wedge (\sim q \to \sim p)]$$

   A) q B) ~p v p C) $q \wedge \sim q$
   D) p E) ~p

6. Dadas las equivalencias lógicas:

   $p \,\Omega\, q \equiv [q \wedge (q \wedge (q \vee p))]$
   $p ☺ q \equiv p \wedge (\sim p \vee \sim q)$

   Simplifique $[(p \,\Omega\, q) \wedge (p ☺ q)] \vee \sim q$

   A) ~q B) ~p C) $p \wedge \sim p$
   D) q v p E) p v ~q

7. Simplifique

   $$\sim[(q \vee p) \wedge (\sim p \to \sim q)] \vee [\sim(q \wedge p) \to (\sim p \wedge q)]$$

   A) $\sim p \wedge q$ B) ~p v q C) p
   D) q E) $q \vee p$

8. Sea p una proposición lógica, definimos

   $$G(p) = \begin{cases} 0;\ \text{si p es falso} \\ 1;\ \text{si p es verdadera} \end{cases}$$

   Si $G(s \to (\sim p \vee q)) = 0$ y $G(\sim q \wedge (r \to q)) = 1$, halle el valor de

   $$K = 3\,G(\sim s \wedge r) + 2\,G(q \vee p) - G(r \wedge \sim q)$$

   A) 3 B) 0 C) 2 D) 1 E) 4

9. Indique el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

   I. $p \to (p \vee q)$
   II. $(p \wedge q) \to p$
   III. $\sim[(p \wedge q) \to p]$

   A) VFV B) VVV C) FVV D) VVF E) FFV

10. Al definir el operador lógico

p	q	p * q
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

   Simplifique la proposición $[(\sim p * q) * p] \to (p * q)$

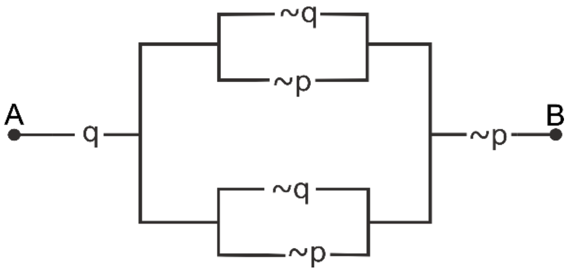
   A) $\sim p \wedge \sim q$ B) $p \wedge \sim q$ C) $p \wedge q$
   D) ~q E) $p \vee \sim q$

11. Sea $U = \{x \in \mathbb{R} / 5 \le x \le 20\}$ el universo. Halle el valor de verdad de

   I. $\exists x \in U / \forall y \in U : x - y < 3$
   II. $\forall x \in U : \exists y \in U / 2x > y + 2$
   III. $\exists x \in U, \exists y \in U / x - y < 13$

   A) VVV B) VFV C) VVF D) FVV E) FFV

12. Simplifique el siguiente circuito



   A) p v q B) $q \wedge \sim p$ C) ~p
   D) ~p v ~q E) ~q

EJERCICIOS DE EVALUACIÓN

1. Sean las proposiciones

   p: Ángel estudia
   q: Ángel se divierte
   t: Ángel trabaja.

   Simplifique la negación de la expresión simbólica del enunciado siguiente: “Si es el caso que Ángel estudia, entonces él no se divierte o trabaja”.

   A) $\sim t \wedge q \wedge p$ B) $(p \vee \sim q) \wedge t$
   C) $\sim p \wedge q \wedge t$ D) $(\sim p \wedge \sim q) \vee t$
   E) $\sim p \vee t \vee p$

2. En la siguiente tabla, halle los valores de verdad de la proposición compuesta

p	q	r	$\left[(p \rightarrow \sim r) \wedge (\sim q \,\Delta\, r)\right] \leftrightarrow (p \vee q)$

   Dé como respuesta cuántas V y F hay respectivamente.

   A) 6 y 2 B) 3 y 5 C) 7 y 1 D) 4 y 4 E) 5 y 3

3. Si el valor de verdad de la proposición

$$(\sim q \wedge p) \wedge [(t \vee \sim p) \wedge (t \rightarrow p)]$$

   es verdadera, halle el valor de verdad de p, q y t respectivamente.

   A) FVV B) FFV C) VFV D) FVF E) FFF

4. Si el valor de verdad de la proposición $[\sim(p \vee q) \rightarrow r]$ es falsa, halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

   I. $(p \vee \sim q) \rightarrow r$
   II. $(\sim p \vee \sim r) \wedge \sim q$
   III. $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$

   A) VVF B) FFV C) FVF D) FVV E) VFF

5. Simplifique

$$(p \rightarrow q) \vee [\sim (p \rightarrow q) \wedge (\sim p \wedge q)].$$

   A) $p \vee \sim q$ B) $\sim p \wedge q$ C) $\sim p \wedge \sim q$
   D) $\sim p \rightarrow q$ E) $p \rightarrow q$

6. Simplifique

$$[(\sim q \rightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)] \rightarrow \sim(q \wedge p)$$

   A) $\sim p \vee \sim q$ B) q C) p
   D) $\sim p \vee p$ E) $p \rightarrow q$

7. De las siguientes proposiciones:

   I. $\sim (q \rightarrow p) \wedge p$ II. $(p \wedge \sim q) \rightarrow q$
   III. $(\sim p \vee q) \wedge (q \vee p)$ IV. $[q \wedge (\sim q \vee p)] \rightarrow q$

   ¿Cuál(es) es (son) tautología(s)?

   A) II y IV B) Solo IV C) Solo II
   D) I y III E) III y IV

8. Dada la equivalencia lógica

$$p \oplus q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \vee \sim p)$$

   Simplifique $[(p \oplus q) \oplus (p \oplus q)]$

   A) $p \wedge \sim p$ B) p C) $p \vee \sim p$
   D) q E) $\sim q$

9. Dadas las siguientes equivalencias lógicas:

$$p * q \equiv \sim p \wedge q \quad \text{y} \quad p © q \equiv p \vee q$$

   Simplifique

$$\{q © [(p \vee (r * s)) \wedge p]\} \rightarrow [(\sim p * \sim q) © \sim q]$$

   A) $p \wedge \sim p$ B) $p \vee \sim p$ C) p
   D) $\sim q$ E) $\sim p$

10. Se define un nuevo operador ($p \otimes q$) mediante la siguiente tabla

p	q	$p \otimes q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

   Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones respectivamente

   I. $[(\sim p \otimes q) \otimes \sim q] \otimes [(p \otimes q) \otimes \sim p]$
   II. $(\sim q \otimes p) \otimes \sim (\sim p \otimes \sim q)$
   III. $\sim\{[(p \otimes \sim q) \otimes q] \wedge \sim q\}$

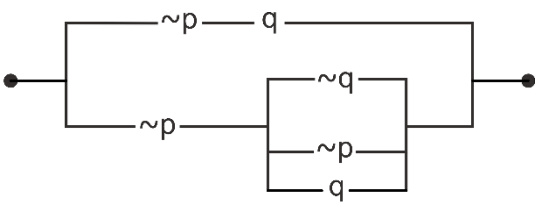
   A) FVF B) VFF C) VFV D) FFF E) VVF

11. Simplifique

$$[\sim p \rightarrow (p \wedge q)] \wedge [\sim q \rightarrow (q \wedge r)]$$

   A) $p \wedge q$ B) $p \vee q$ C) $p \wedge r$
   D) $p \vee r$ E) $q \wedge r$

12. Halle la proposición equivalente al circuito lógico



   A) $p \vee q$ B) $\sim p$ C) $p \wedge \sim q$
   D) $\sim p \vee q$ E) $q \vee \sim p$