



FUNCIÓNES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIÓNES

Una función de A en B es una relación $F \subset A \times B$ que hace corresponder a cada elemento $x \in A$ un único elemento $y \in B$, denotado por $y = F(x) \in B$.

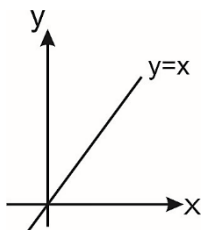
Dominio: $\text{Dom}F = \{x \in A / \exists y \in B \wedge y = F(x)\} \subset A$

Rango: $\text{Ran}F = \{y \in B / \exists x \in A / y = F(x)\} \subset B$

FUNCIÓNES BÁSICAS

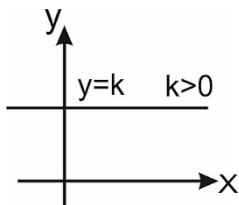
Función identidad:

$I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow I(x) = x$
 $\text{Dom} I = \mathbb{R}$
 $\text{Rang} I = \mathbb{R}$



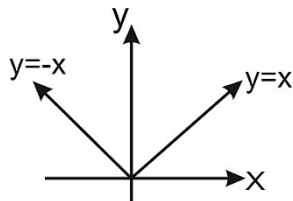
Función constante:

$F(x) = k, k \in \mathbb{R}$
 $\text{Dom}F = \mathbb{R}$
 $\text{Rang}F = k$



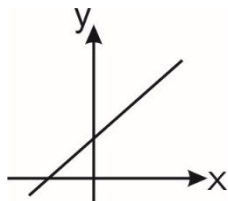
Función valor absoluto:

$F(x) = |x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$
 $\text{Dom}F = \mathbb{R}$
 $\text{Ran}F = [0, \infty)$



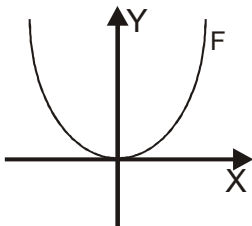
Función lineal:

$F(x) = ax + b, a \neq 0.$
 $\text{Dom}F = \mathbb{R}$
 $\text{Rang}F = \mathbb{R}$



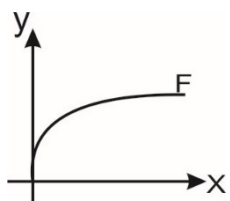
Función Cuadrática:

$F(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$
 $\text{Dom}F = \mathbb{R}$
 $\text{Ran}F = [0, +\infty)$



Función raíz cuadrada:

$F(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$
 $\text{Dom}F = [0, +\infty)$
 $\text{Rang}F = [0, +\infty)$



Función Periódica:

Sea F una función. F es una función periódica si existe un $T \in \mathbb{R}$ tal que $F(x+T) = F(x)$ para todo $x \in \text{Dom}F$.

FUNCIÓNES TRIGONOMÉTRICAS

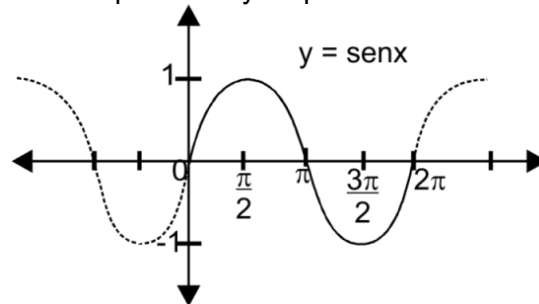
Función seno.-

Es la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}x$.

El rango de la función es $[-1; 1]$.

La función es simétrica con respecto al origen por lo que es función impar y $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$.

Es una función periódica y su periodo es 2π .



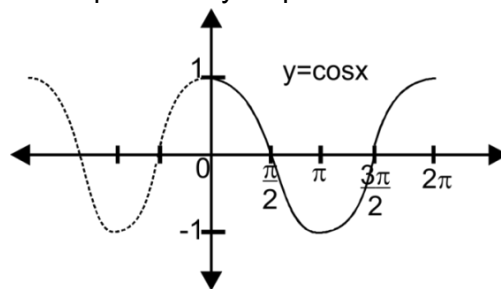
Función coseno.-

Es la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{cos}x$.

El rango de la función es $[-1; 1]$.

La función es simétrica con respecto al eje Y por lo que es función par y $\text{cos}(-x) = \text{cos}x$.

Es una función periódica y su periodo es 2π .

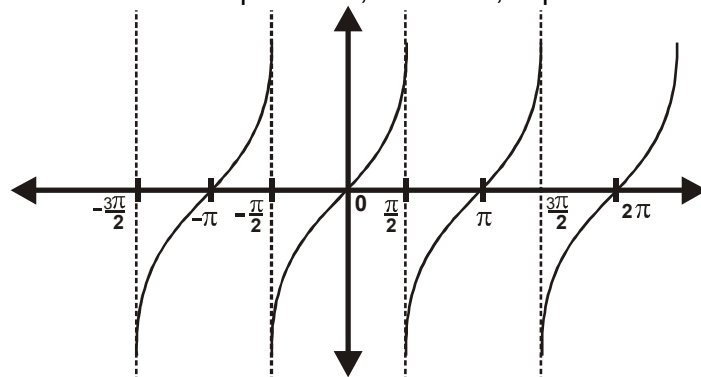


Función tangente.-

Es el conjunto $\text{tan} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \text{tan}x\}$

Dominio: $\mathbb{R} - \left\{n\pi + \frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\right\}$ y Rango: \mathbb{R}

La función "tan" es periódica, creciente, impar. $T = \pi$



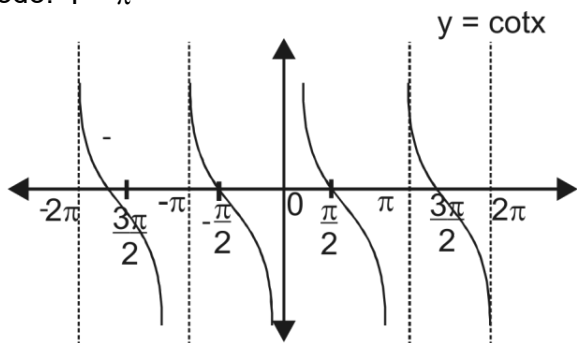
Función Cotangente.- Es el conjunto

$$\cot := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \cot x\}$$

Dominio: $\mathbb{R} - \{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$

Rango: \mathbb{R}

Periodo: $T = \pi$



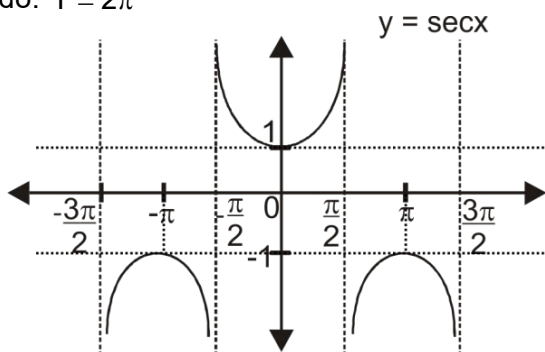
Función Secante.- Es el conjunto:

$$\sec := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sec x\}$$

Dominio: $\mathbb{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\}$.

Rango: $\langle -\infty, -1 \rangle \cup [1, +\infty) \Leftrightarrow \sec x \leq -1 \vee \sec x \geq 1$

Periodo: $T = 2\pi$



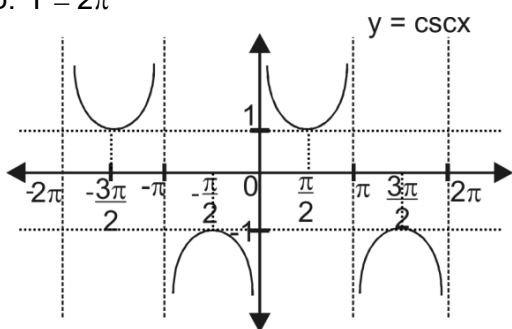
Función Cosecante.- Es el conjunto

$$\csc := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \csc x\}$$

Dominio: $\mathbb{R} - \{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$

Rango: $\langle -\infty, -1 \rangle \cup [1, +\infty) \Leftrightarrow \csc x \leq -1 \vee \csc x \geq 1$

Periodo: $T = 2\pi$



EJERCICIOS DE CLASE

1. Si el dominio de la función real f definida por $f(x) = \frac{\text{sen}2x + \cos2x}{\text{sen}3x - \csc\frac{\pi}{6}}$ es $\mathbb{R} - \{(An \pm 1)\frac{\pi}{B} / n \in \mathbb{Z}\}$.

Calcule A + B

- A) 20 B) 15 C) 30 D) 10 E) 25

2. Sean las funciones reales f y g, definidas por $f(x) = 3\text{sen}2x - 1$ y $g(x) = 2\text{sen}3x + 1$. Determinar la intersección del rango de f y el rango de g.

- A) $\langle 0, 2 \rangle$ B) $[-1, 2]$ C) $[-4, -1]$
D) $\langle -1, 2 \rangle$ E) $[-1, 2]$

3. Sea la función real F definida por $F(x) = 2\text{sen}^2 2x + 4\text{sen}2x + 4\text{cos}^2 2x$, $\frac{3\pi}{4} \leq x < \pi$. Halle la suma de los números enteros que pertenecen al rango de F.

- A) 3 B) 7 C) 2 D) 4 E) 5

4. Dada la función real f definida por $f(x) = \text{sen}(\sqrt{4-x^2}) + \text{cos}\sqrt{x}$, halle el dominio de f.

- A) $[-2, 0]$ B) $[-2, 2]$ C) $\langle 0, 2 \rangle$
D) $\langle -2, 2 \rangle$ E) $[0, 2]$

5. Sea la función real f definida por $f(x) = \text{cos}x(\text{cos}x - 4)$. Determine el valor de $a^2 + b^2 - ab$, si el rango de f es el intervalo $[a, b]$.

- A) 49 B) 32 C) 34 D) 36 E) 30

6. Sea la función real f definida por $f(x) = \frac{2\text{cos}x + 3}{\text{cos}x - 2}$, $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$. Si el rango de f es $[a, b]$, hallar $15ab$.

- A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 4 E) $\frac{3}{2}$

7. Si el rango de la función real f definida por $f(x) = 2 - 5\csc^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$, $x \in \left(\frac{17\pi}{180}, \frac{2\pi}{9}\right)$ es $[c, d]$, calcular $c + d$.

- A) -19 B) -20 C) -18
D) -21 E) -22

8. Si el intervalo $\langle a; b \rangle$ es el rango de la función real f definida como:

$$f(x) = \frac{\sec^2 \frac{\pi}{3} \cdot \cos 8x}{\cos 4x - \sin 4x}$$

Halle el valor de: $F = \sqrt{2}(b - a)$

- A) 4 B) 8 C) 16 D) 31 E) 0
9. Calcule la suma de los periodos de las siguientes funciones trigonométricas:

$$f(x) = 3 \cos\left(\frac{9x + \pi}{6}\right) + 2; g(x) = \cot\left(-\frac{2x}{3} + \pi\right) + 1.$$

- A) $\frac{17\pi}{2}$ B) $\frac{17\pi}{6}$ C) $\frac{4\pi}{3}$
 D) $\frac{3\pi}{2}$ E) $\frac{17\pi}{4}$
10. Determine el rango de la función real f definida por:

$$f(x) = \sqrt{\csc^4 3x - \cot^4 3x} + 3.$$

- A) $[-9; +\infty)$ B) $[4; +\infty)$ C) $[-4; +\infty)$
 D) $[1; +\infty)$ E) $[0; +\infty)$
11. Sea la función f definida por $f(x) = \sec^2 x + \csc^2 x$. Determine el complemento de su rango

- A) $\langle -\infty; 4 \rangle$ B) $\langle -\infty; 2 \rangle$ C) $\langle -\infty; 1 \rangle$
 D) $\langle -\infty; 0 \rangle$ E) $\langle -100; 4 \rangle$
12. Halle el rango de la función f definida por

$$f(x) = \sec^4 4x + \tan^4 4x + 4$$

- A) $\langle 1, +\infty \rangle$ B) $[5, +\infty)$ C) $[\sqrt{2}, +\infty)$
 D) $[2\sqrt{2}, +\infty)$ E) $\langle \sqrt{2}, +\infty \rangle$

EJERCICIOS DE EVALUACIÓN

1. Determine el dominio de la función real f definida por $f(x) = |\sin 3x - \cos 8x| + \sqrt{\cos 3x - 1}$.

- A) $\left\{ \frac{n\pi}{3} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ B) $\left\{ \frac{2n\pi}{3} / n \in \mathbb{Z} \right\}$
 C) $\{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$ D) $\left\{ (2n+1)\frac{\pi}{3} / n \in \mathbb{Z} \right\}$
 E) $\left\{ (2n+1)\frac{\pi}{6} / n \in \mathbb{Z} \right\}$

2. Halle el complemento del dominio de la función real f definida por

$$f(x) = \frac{1 + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} - \frac{1 - \cos^2 x}{1 - 2 \cos^2 x}.$$

- A) $\left\{ \frac{n\pi}{4} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ B) $\left\{ \frac{n\pi}{8} / n \in \mathbb{Z} \right\}$
 C) $\{n\pi / n \in \mathbb{Z}\}$ D) $\left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{Z} \right\}$
 E) $\left\{ \frac{n\pi}{2} / n \in \mathbb{Z} \right\}$
3. El ingreso trimestral en millones de dólares de la empresa Computer Ctiy se modela por $I(t) = A \sin\left(\frac{2\pi t}{5} + \frac{\pi}{2}\right) + 0.455$ donde "t" es el tiempo de trimestre, si al final del quinto trimestre el ingreso fue 561000 dólares. Calcule $A + T$. (T es el periodo de la función).

- A) 4.306 B) 5.106 C) 6.26
 D) 9 E) 10

4. Halle la diferencia entre el mayor y el menor número entero que pertenece al rango de la función real f definida por

$$f(x) = 4\sqrt{2} \cos 2x + 3, \quad x \in \left\langle \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{5} \right\rangle$$

- A) 5 B) 8 C) 9
 D) 3 E) 6

5. Halle el rango de la función real F definida por

$$F(x) = \frac{4\sqrt{\sin x} + \pi\sqrt{\cos x}}{\frac{\pi}{2} - |x|}, \quad \pi \leq x \leq 2\pi$$

- A) $\left[0, \frac{\pi}{2} \right)$ B) $\left[\frac{\pi}{2}, \pi \right)$ C) $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$
 D) $[0, 2\pi]$ E) $\left[0, \frac{3\pi}{2} \right]$

6. Sea T la temperatura de una región de Lima (en grados centígrados), definida en término de tiempo t tal que $T(t) = 24 \cos(at) + 10 \sin(at) + 14$, calcule la temperatura máxima.

- A) 30 B) 40 C) 28
 D) 25 E) 20

7. Una masa "M" se sitúa por encima de un resorte, dicho resorte oscila de tal manera que $L(t) = \text{sen}t + \sqrt{3} \text{cost}$, representa la longitud del resorte (en centímetros) en el instante t (en minutos), $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Halle el instante en segundos en donde el resorte mide 2 cm.

- A) 20π seg B) 10π seg C) $\frac{\pi \text{ seg}}{3}$
 D) $\frac{\pi \text{ seg}}{6}$ E) $\frac{\pi \text{ seg}}{2}$

8. Sea la función real f definida por $f(x) = \frac{\sqrt{1 - |\sec 4x|}}{3 - \text{sen}x}$. Determine el dominio de la función f .

- A) $\left\{\frac{n\pi}{2} / n \in \mathbb{Z}\right\}$ B) $\left\{\frac{2n\pi}{3} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
 C) $\left\{\frac{n\pi}{4} / n \in \mathbb{Z}\right\}$ D) $\left\{\frac{n\pi}{8} / n \in \mathbb{Z}\right\}$
 E) $\left\{\frac{n\pi}{5} / n \in \mathbb{Z}\right\}$

9. Determine el complemento del rango de la función real f definida por

$$f(x) = \frac{\text{sen}x - 6\cos\pi}{\text{sen}x - 2018 \text{ctg} \frac{3\pi}{2}}$$

- A) $\langle -1, 3 \rangle$ B) $\langle -5, 7 \rangle$ C) $[-5, 7]$
 D) $[-1, 3]$ E) $\langle -6, 5 \rangle$

10. La temperatura expresada en grados centígrados en una ciudad, está descrita por la función T definida por $T(t) = 12\cos(at) + 5\text{sen}(at) + 10$, $a > 0$. Calcule la temperatura

- A) -1°C B) 4°C C) -3°C
 D) -4°C E) 3°C

11. La función real f está definida por

$$f(x) = (\sqrt{8} - \text{sen}x)(\sqrt{8} + \text{sen}x), \quad \frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$$

Si M es el valor máximo que puede tomar f , calcule el valor de $4M - \sqrt{2}$.

- A) 30 B) 32 C) 28
 D) 25 E) 35

12. Sea la función real f definida por $f(x) = \sqrt{\cos 6x - \frac{1}{9}}$. Si $[c, d]$ es el rango de f , halle $c + 6\sqrt{2}d$.

- A) 8 B) 5 C) 7
 D) 9 E) 6