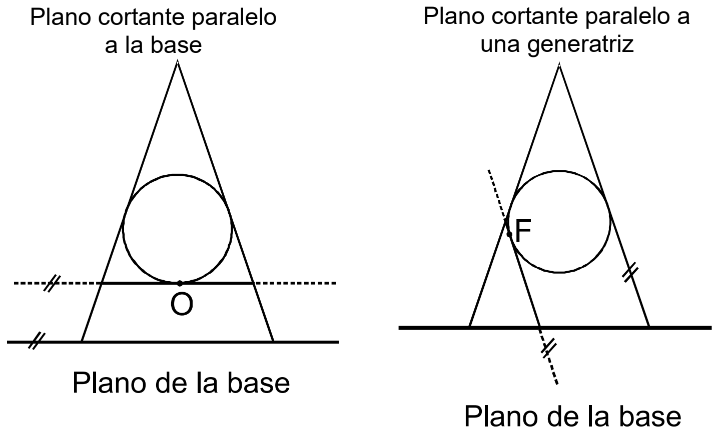
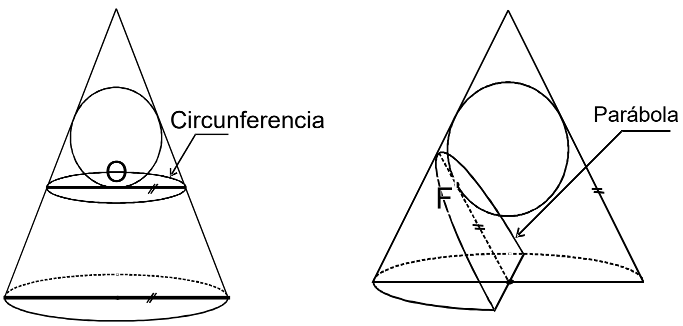
SECCIONES CÓNICAS: CIRCUNFERENCIA Y PARÁBOLA

Podemos tener una idea, algo vaga, de lo que es una sección cónica si recordamos que *seccionar* es cortar y que el término cónico está referido al cono, es decir, las secciones cónicas tienen que ver más o menos con cortes hechos en un cono.

Vistas frontales



Estos planos cortantes dividen al cono en dos partes, a continuación están dibujadas las partes del cono que no permiten visualizar con claridad la sección producida en el cono.

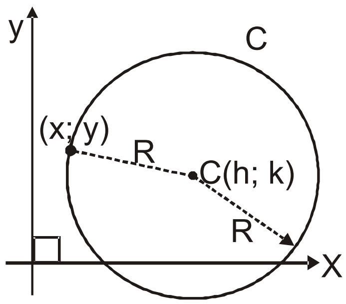


LA CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a un punto fijo de dicho plano es siempre constante. El punto fijo se llama centro de la circunferencia y la distancia constante radio de la circunferencia.

De la figura:

$$R=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$



(distancia entre puntos). Elevando al cuadrado y acomodando.

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2=R^2} \quad (x;y)\in C$$

Ésta es la ecuación de la circunferencia C: es una ecuación cuadrática de dos variables que llevada a su forma general quedará:

$$\boxed{x^2+y^2+Cx+DY+E=0}$$

Obsérvese que los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales a la unidad.

TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

Se siguen los pasos siguientes:

1º. Se forma el sistema:

$$C: x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$
$$T: y=mx+b \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

2º. Se sustituye (2) en (1): que resulta una ecuación cuadrática de la forma:

$$ax^2+bx+c=0$$

3º. Se aplica la condición de tangencia:

Las raíces deben ser iguales, es decir el discriminante debe ser cero:

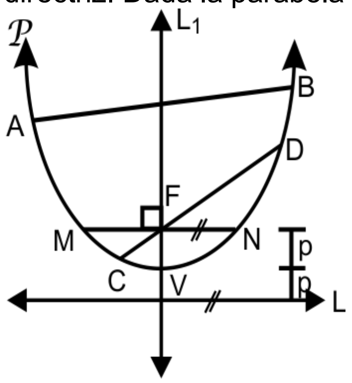
$$b^2-4ac=0$$

LA PARÁBOLA

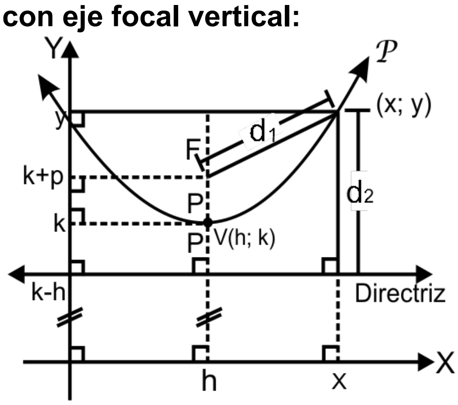
Es el conjunto de puntos del plano cartesiano que se encuentra a una misma distancia de un punto llamado foco y de una recta llamada directriz. Dada la parábola P

F : Foco de P
$\overleftrightarrow{L}$: Directriz de P
$\overleftrightarrow{L}_1$: Eje focal de P
V : Vértice de P
p : Parámetro de P
$\overline{AB}$: Cuerda de P
$\overline{CD}$: Cuerda focal de P
$\overline{MN}$: Lado recto de P

$$\boxed{MN=4p}$$



Parábola con eje focal vertical:



En la figura; F(h; k + p): foco de P.
Entonces: $d_1 = d_2$

$$\sqrt{[y-(k+p)]^2+(x-h)^2}=y-(k-p)$$

Elevando al cuadrado

$$[y-(k+p)]^2+(x-h)^2=[y-(k-p)]^2$$

Operando los corchetes y acomodando

$$(k+h)^2=[(y-k)+p]^2-[y-(k-p)]^2$$

Aplicando la identidad de Legendre:

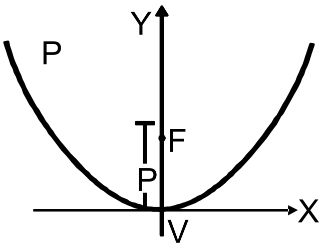
$$(x-h)^2=4(y-k)p$$

Acomodando $\boxed{(x-h)^2=4p\ (y-k)}$ $x;y\in P$

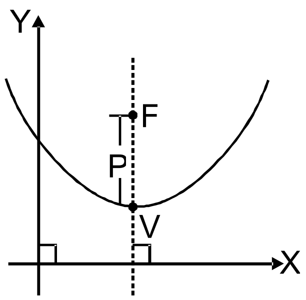
NOTA 1:
Cuando el eje focal es el eje de las Y y el vértice es el origen de coordenadas, se tiene que $(h;k)=(0;0)$, entonces la ecuación es:

$\boxed{x^2=4pY,(x;y)\in P}$

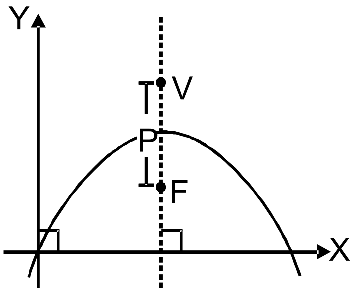
V: vértice
F: foco de P
p: parámetro de P



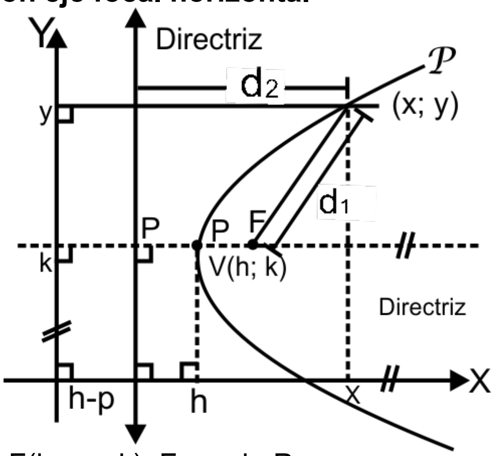
NOTA 2:
a) La parábola se abre hacia arriba $\Rightarrow p>0$



b) La parábola se abre hacia abajo $\Rightarrow p<0$



Parábola con eje focal horizontal



En la figura F(h + p; k): Foco de P.

Entonces $d_1 = d_2$

$$\sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2}=y-(h-p)$$

Elevando al cuadrado

$$[x-(h+p)]^2+(y-k)^2=[x-(h-p)]^2$$

Operando los corchetes y acomodando

$$(y-k)^2=[x-(h-p)]^2-[x-(h+p)]^2$$

Aplicando la identidad de Legendre

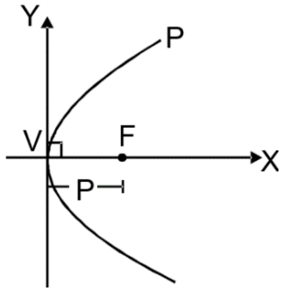
$$(y-k)^2=1(x-h)p$$

Acomodando $\boxed{(y-k)^2=4p(x-h)}$ $(x;y)\in P$

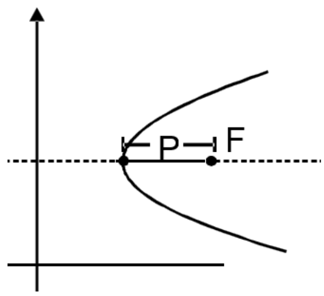
NOTA 3:
Cuando el eje focal es el eje de las X y el vértice es el origen de coordenadas, se tiene que $(h;k)=(0;0)$, entonces la ecuación es:

$\boxed{Y^2=4pX,\ (x;y)\in P}$

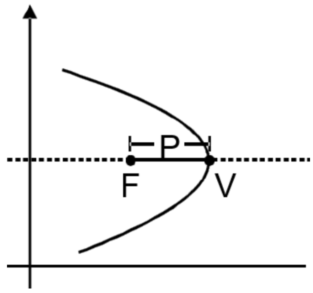
V: vértice
F: foco de P
p: parámetro de P



NOTA 4:
a) La parábola se abre hacia la derecha $\rightarrow$ P > 0



b) La parábola se abre hacia la izquierda $\rightarrow$ P < 0



EJERCICIOS DE CLASE

1. Determina la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (2; -3) y es tangente al eje de abscisas.

A) $(x-2)^2+(y-3)^2=3$
B) $(x+2)^2+(y+3)^2=9$
C) $x^2+(y+3)^2=9$
D) $(x+2)^2+y^2=9$
E) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$

2. Los puntos A (1; 3) y B (3; 1) son los extremos del diámetro de una circunferencia. Determine su ecuación.

A) $x^2+y^2+2x+2y-3=0$
B) $x^2+y^2-2x-2y+3=0$
C) $x^2+y^2-4x-4y+6=0$
D) $x^2+y^2+4x+4y-6=0$
E) $x^2+y^2-3x+3y+4=0$

3. Determine la ecuación de la circunferencia concéntrica con $C_1: x^2+y^2-6x+5y-10=0$, y que pasa por el origen de coordenadas.

A) $x^2+y^2+6x-5y=0$
B) $x^2+y^2-6x+5y=0$
C) $x^2+y^2-6x-5y=0$
D) $x^2+y^2+6x+5y-1=0$
E) $x^2+y^2+6x+5y=0$

4. Determine el valor de "K" para que la ecuación: $x^2+y^2-8x+10y+K=0$, represente una circunferencia de radio 4u.

A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

5. Determine la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2-8x-6y+20=0$ en el punto (3; 5).

A) $x+4y-2=0$ B) $x-4y+3=0$
C) $x+4y-1=0$ D) $x+2y-5=0$
E) $x-2y+7=0$

6. Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por A (0; 2) y es tangente a la recta $L: 2x+y=0$, en el origen.

A) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ B) $(x-1)^2+(y-1)^2=2$
C) $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ D) $(x-1)^2+(y-1)^2=5$
E) $(x-2)^2+(y-2)^2=5$

7. Determine la ecuación de una de las rectas tangentes a la circunferencia $C: x^2+y^2+6x-8=0$, que son perpendiculares a la recta: $y=4x+31$.

A) $x-4y+10=0$ B) $x-y+10=0$
C) $x+2y+20=0$ D) $x+4y+20=0$
E) $x+4y+10=0$

8. La ecuación de una circunferencia es: $x^2+y^2=50$. El punto medio de una cuerda de esta circunferencia es $P(-2;4)$. Determine la ecuación de la recta que contiene a la cuerda

A) $2x-y+20=0$ B) $x+2y-5=0$
C) $2x-y+5=0$ D) $x-2y+10=0$
E) $x+2y-10=0$

9. Dada la ecuación de la parábola $9x^2+24x+72y+16=0$, calcule la longitud del lado recto.

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

10. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(2;4)$ es siempre igual a su distancia del eje Y aumentada en 3. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

A) $y^2+10x+8y-11=0$
B) $y^2+10x-8y-11=0$
C) $y^2-10x+8y-11=0$
D) $y^2-10x-8y+11=0$
E) $y^2-10x+8y-11=0$

11. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje X es siempre igual a su distancia del punto $A(0;4)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

A) $x^2+4y-8=0$ B) $x^2-4y+8=0$
C) $x^2+8y-16=0$ D) $x^2-8y+16=0$
E) $x^2-8y-16=0$

12. Hallar la longitud del radio vector del punto de la parábola:

$$y^2+4x+2y-19=0$$

Cuya ordenada es igual a 3.

A) 2 u B) 3 u C) 4 u D) 5 u E) 6 u

13. Determine la ecuación de la parábola de eje vertical que pasa por los puntos (0; 0), (1; –1) y (4; 0).

A) $(x-1)^2=2y+1$ B) $(x-2)^2=3y-2$
C) $(x-2)^2=3y$ D) $(x-2)^2=2y+3$
E) $(x-2)^2=3y+4$

EJERCICIOS DE EVALUACIÓN

1. Hallar la distancia del foco de la parábola $x^2 - 4x - 8y - 20 = 0$ a la recta L: $3x + y - 6 = 0$.

A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B) $\frac{\sqrt{10}}{14}$ C) 2 D) 13 E) 1,1

2. Una recta con pendiente positiva que pasa por el punto $(-4; 0)$ determina en la circunferencia de ecuaci6n $x^2 + y^2 = 16$ una cuerda de 6,4 u de longitud. Hallar la ecuaci6n de la recta.

A) $3x - 4y + 3 = 0$ B) $3x - 4y + 12 = 0$
C) $3x - 4y + 6 = 0$ D) $3x - 4y + 12 = 0$
E) $3x - 2y + 12 = 0$

3. Dado el punto N = (2; 4) y la circunferencia, $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$, determinar el área del triángulo cuyos vértices son N y las intersecciones de C con el eje de abscisas.

A) 17 B) 30 C) 14
D) 12 E) 11

4. Dada la ecuación de la parábola $y^2 - 4y - 8x + 44 = 0$, entonces la suma de las coordenadas del *foco* de la parábola es

A) 9 B) 8 C) 4
D) 3 E) 1

5. La recta L y la parábola $y^2 - 6y - x + 11 = 0$ se cortan en el punto P = (6; 1). Si V es el vértice de la parábola, determinar la ecuación de L si es perpendicular a VP.

A) $2x - y - 11 = 0$ B) $x - y - 11 = 0$
C) $2x - y - 1 = 0$ D) $x - y - 1 = 0$
E) $x - 5y - 11 = 0$

6. Encontrar la ecuación de la recta de pendiente positiva que pasa por el origen de coordenadas y por el punto de intersección de las curvas $x^2 + y^2 - 6 = 0$ e $y = x^2$

A) $y = \sqrt{2}x$ B) $y = \sqrt{11}x$ C) $y = \sqrt{21}x$
D) $y = 2\sqrt{21}x$ E) $y = 3\sqrt{21}x$

7. Desde un punto P(8; 6) exterior a la circunferencia C: $x^2 + 4x + y^2 + 10x + 4 = 0$ se traza la tangente PT (T: punto de tangencia). Hallar PT.

A) 17 B) 30 C) 14
D) 13 E) 11

8. Sean la parábola con ecuación $y^2 + 8x = 0$ y la línea recta L cuya ecuación es: $4x + 3y - 7 = 0$; entonces, la ecuación de la línea recta que pasa por el foco de la parábola y paralela a la recta L es:

A) $4x + 3y - 7 = 0$ B) $4x + 3y + 7 = 0$
C) $x + 3y - 7 = 0$ D) $4x + 3y + 8 = 0$
E) $4x + y - 7 = 0$

9. Sea la línea recta L cuya ecuación es: $3x + 4y - 12 = 0$; entonces, la ecuación de la circunferencia canónica (su centro es el origen de las coordenadas) tangente a la recta L es:

A) $25x^2 + 25y^2 + 144 = 0$
B) $5x^2 + 25y^2 + 144 = 0$
C) $25x^2 + 25y^2 - 144 = 0$
D) $25x^2 + 5y^2 + 144 = 0$
E) $25x^2 + 25y^2 + 4 = 0$

10. Hallar la ecuación de la circunferencia sabiendo que su centro está en C = (m; n) donde una recta tiene dos puntos comunes con dicha circunferencia en los puntos A = (1: 5), B = (4; 2) y además la distancia del centro a dicha recta es $3\frac{\sqrt{2}}{2}$: (n – m = 1) Y considerar que el centro es un punto cercano al origen de coordenadas.

A) $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 4$
B) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$
C) $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 6$
D) $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 6$
E) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$

11. El punta C = (3; –1) es el centro de la circunferencia: que interseca en la recta: $2x - 5y + 18 = 0$, una cuerda cuya longitud es igual a 6. Hallar la ecuación de esta circunferencia

A) $(x + 44)^2 + (y - 2)^2 = 2$
B) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 44$
C) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 24$
D) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 54$
E) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 38$

12. Hallar la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es el punto A(1, 4) y pasa por el foco de la parábola P: $y^2 + 8x = 0$

A) $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$
B) $x^2 - y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$
C) $x^2 - y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$
D) $x^2 + 2y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$
E) $2x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$

