LOGARITMOS

DEFINICIÓN

Se define logaritmo de un número real positivo (N), en una base positiva (b) y diferente de 1, al exponente (x) al cual se debe elevar la base para obtener una potencia b^x igual al número N

Se representa: $\boxed{\text{Log}_b N = x \Leftrightarrow b^x = N}$; $b > 0 \wedge b \neq 1$

Ejemplos:

➩ $\text{Log}_9 729 = 3$; Porque: $9^3 = 729$

➩ $\text{Log}_{\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{81}{16}\right) = -4$; Porque: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{81}{16}$

➩ $\text{Log}_{\left(\frac{1}{64}\right)} 2 = -\frac{1}{6}$; Porque: $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{6}} = 2$

➩ $\text{Log}_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16 \quad \therefore \boxed{x = 16}$

1. **LOGARITMO DECIMAL**

   Se llaman logaritmos decimales o vulgares a los logaritmos que tienen por base el número 10. Al ser muy habituales es frecuente no escribir la base.

2. **LOGARITMO NEPERIANO**

   Se llaman logaritmos neperianos, naturales o hiperbólicos a los logaritmos que tienen por base el número "e". Se representa Ln x

   Ln x: Se lee Logaritmo neperiano de "x"

PROPIEDADES ASOCIADAS

Sean M, N > 0 y b > 0, diferente de la unidad

I. Logaritmo de la unidad: $\boxed{\text{Log}_b 1 = 0}$

II. Logaritmo de la base: $\boxed{\text{Log}_b b = 1}$

III. Logaritmo de un producto:

$$\boxed{\text{Log}_b(M \cdot N) = \text{Log}_b M + \text{Log}_b N}$$

IV. Logaritmo de un cociente:

$$\boxed{\text{Log}_b\left(\frac{M}{N}\right) = \text{Log}_b M - \text{Log}_b N}$$

V. Logaritmo de una potencia:

$$\boxed{\text{Log}_b M^n = n \cdot \text{Log}_b M}$$

VI. Logaritmo de una raíz: $\boxed{\text{Log}_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \cdot \text{Log}_b M}$

VII. Cambio de base: $\boxed{\text{Log}_b M = \frac{\text{Log}_k M}{\text{Log}_k b}}$

Consecuencia: Regla de la cadena

$$\boxed{\text{Log}_Y X \cdot \text{Log}_Z Y \cdot \text{Log}_W Z = \text{Log}_W X}$$

VIII. Si a la base y al número se le eleva o se le extrae la raíz de una misma cantidad entonces su valor no varía

$$\boxed{\text{Log}_b M = \text{Log}_{b^k} M^k \cdot \text{Log}_{\sqrt[k]{b}} \sqrt[k]{M}}$$

IX. El teorema fundamental de los logaritmos:

$$\boxed{b^{\text{Log}_b M} = M} \; ; b > 0 ; \; b \neq 1$$

Consecuencia:

$$\boxed{M^{\text{Log}_b N} = N^{\text{Log}_b M}}$$

3. **COLOGARITMO**

   Es el logaritmo de la inversa del número. También puede expresarse como el opuesto del logaritmo del mismo número.

$$\boxed{\text{Colog}_b N = \text{Log}_b\left(\frac{1}{N}\right) = -\text{Log}_b N}$$

Ejemplo: $\text{Colog}_5 25 = -\text{Log}_5 25 = -2$.

4. **ANTILOGARITMO**

   Es el número al cual se ha tomado su logaritmo.

$$\boxed{\text{Antilog}_b x = b^x}$$

Ejemplo: $\text{Antilog}_3 4 = 3^4 = 81$

PROPIEDADES ASOCIADAS

I. $\boxed{\text{Antilog}_b(\text{Log}_b N) = N}$

II. $\boxed{\text{Log}_b(\text{Antilog}_b N) = N}$

III. $\boxed{\text{Colog}_b(\text{Antilog}_b N) = -N}$

5. **ECUACIONES LOGARÍTMICAS**

   Son aquellas que se caracterizan por la presencia de logaritmos. Para resolver se deben usar las propiedades. Además

$$\boxed{\text{Log}_b f(x) = \text{Log}_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)} \; ..... \text{(i)}$$

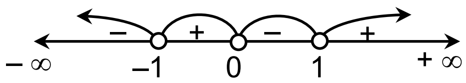
Donde:

$$b > 0 \wedge b \neq 1 \wedge f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \qquad \text{(ii)}$$

Ejemplo: Resolver: $\mathrm{Log}_3(x^3-x)=2\cdot\mathrm{Log}_3 x$

Por la condición (ii): $x^3-x>0 \wedge x>0$

$x\,(x+1)(x-1)>0 \quad \wedge \quad x>0$



El dominio queda restringido a: $\langle 1,+\infty\rangle$

Por la condición (i):

$\mathrm{Log}_3(x^3-x)=2\cdot\mathrm{Log}_3 x \Rightarrow \mathrm{Log}_3(x^3-x)=\mathrm{Log}_3 x^2$

Entonces: $x^3-x=x^2 \;\Rightarrow\; x^3-x^2-x=0$

Factorizamos: $x(x^2-x-1)=0$

Resolviendo: $x=0 \;\vee\; x=\dfrac{1+\sqrt5}{2} \;\vee\; x=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$

Analizando: $x=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$, es la única solución.

6. **SISTEMA DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS.**
Se trata de resolver 2 ó más ecuaciones que contienen 2 ó más incógnitas, en las cuales se presentan logaritmos. Para resolver se debe usar propiedades

Ejemplo: $\begin{cases} 2\mathrm{Log}x+\mathrm{Log}y=5 \;.....\;(i)\\ \mathrm{Log}x+\mathrm{Log}y=4 \;....\;(ii)\end{cases}$

Resolvemos aplicando eliminación, de (i) – (ii):

⇨ $\mathrm{Log}x=1 \Rightarrow \boxed{x=10}$

⇨ Sustituyendo en ((ii):

$\mathrm{Log}y=3 \Rightarrow \boxed{y=1000}$

7. **INECUACIONES LOGARÍTMICAS**
PRIMER CASO: La base es mayor que 1
a) Las bases mayores que 1 tienen logaritmo positivo.
b) Las bases entre 0 y 1 tienen logaritmos negativos. Por ello; dados x e y que pertenecen a "$\mathbb{R}$"
$b>1 \wedge 0<x<y \Rightarrow \log_b x<\log_b y$
Luego si:

I) $x>0\,;b>1 \Rightarrow \log_b x>N \Rightarrow x>b^N$

II) $x>0\,;b>1 \Rightarrow \log_b x<N \Rightarrow 0<x<b^N$

SEGUNDO CASO
La base está entre 0 y 1: $0<b<1$
a) Los números mayores que 1 tienen logaritmo negativo
b) Los números entre 0 y 1 tienen logaritmos positivos. Luego si:

I) $x>0\,;\; 0<b<1 \Rightarrow \log_b x>N \Rightarrow 0<x<b^N$

II) $x>0\,;\; 0<b<1 \Rightarrow \log_b x<N \Rightarrow x>b^N$

OBSERVACIONES
I. Solamente existe logaritmos de números positivos en el campo de los números reales.
II. La base de un logaritmo es un número mayor que cero y distinto de la unidad $b>0\,;\; b\neq 1$

Veamos algunos ejercicios resueltos:

1. Hallar el valor de

$$E=\mathrm{Antilog}\left\{\mathrm{Log}\left[\mathrm{Antilog}_{625}\left(\mathrm{Log}_{16}\mathrm{Log}_{49}\sqrt7\right)+\mathrm{Antilog}_{5/2}\mathrm{Log}_{\sqrt3}\left(\mathrm{Colog}_{27}\frac13\right)\right]+1\right\}$$

Resolución:
Hagámoslo por partes:

$E=\mathrm{Antilog}\{\mathrm{Log}(A+\mathrm{Antilog}_{5/2}B)+1\}$

donde: $A=\mathrm{Antilog}_{625}\mathrm{Log}_{16}\mathrm{Log}_{49}\sqrt7$

$B=\mathrm{Log}_{\sqrt3}\left(\mathrm{Colog}_{27}\frac13\right)$

Simplificando A:

$A=\mathrm{Antilog}_{625}\mathrm{Log}_{16}\mathrm{Log}_{49}7^{\frac12}$

$=\mathrm{Antilog}_{625}\mathrm{Log}_{16}\left(\frac14\right)$

$=\mathrm{Antilog}_{625}\left(-\frac12\right)=625^{-\frac12}=\frac1{25} \rightarrow \boxed{A=\frac1{25}}$

Simplificando B

$B=\mathrm{Log}_{\sqrt3}\left(\mathrm{Colog}_{27}\frac13\right)=\mathrm{Log}_{\sqrt3}\left(\mathrm{Log}_{27}3^{-1}\right)$

$=\mathrm{Log}_{\sqrt3}\left(3^{-1}\right)=-2$

Reemplazando en E

$E=\mathrm{Antilog}\left\{\mathrm{Log}\left(5^{-2}+\mathrm{Antilog}_{5/2}(-2)\right)+1\right\}$

$E=\mathrm{Antilog}\left\{\mathrm{Log}\left(\frac1{25}+\frac4{25}\right)+1\right\}$

$E=\mathrm{Antilog}\left\{\mathrm{Log}\frac15+\mathrm{Log}10\right\}=\mathrm{Antilog}(\log 2)$

$=10^{\mathrm{Log}2}=2$

Puesto que $b^{\mathrm{Log}_b N}=N \qquad \therefore\; E=2$

2. Determine la solución positiva que satisface a la ecuación:

$$e^{\ln\left(a^4+6a^2-770\right)}=5$$

donde "e" es la base del sistema de logaritmos neperianos.

Resolución:

Recuerda que: $e^{\ln x}=x$

Luego: $e^{\ln\left(a^4+6a^2-770\right)}=a^4+6a^2-770=5$

$(a^2+31)(a^2-25)=0$

piden la solución positiva, luego: a = 5.

EJERCICIOS DE CLASE

1. Hallar el valor de:

$$E = \left({}^{\log_2}\sqrt[3]{\log_3 135 - \log_9 25}\right)\log_{\sqrt[3]{125}}\sqrt{0,0016}$$

A) 2 B) – 3 C) 0 D) – 4 E) 5

2. Sabiendo que:

$$(a-b)^{-1} + (b-c)^{-1} = (a-c)^{-1},\ a > b > c$$

Encontrar el valor:

$$P = \frac{\log(a-b) + \log(b-c)}{\log(a-c)}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 10 E) 9

3. El número $\dfrac{2}{\log_4(2000)^6} + \dfrac{3}{\log_5(2000)^6}$ es equivalente a.

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{4}$

4. Calcular E, si $x = \sqrt[10]{3}$

$$E = \log_x\left(3^{\log_{\sqrt{3}} x} + 4^{\log_2 x} + 6^{\log_{\sqrt{6}} x}\right)$$

A) 11 B) 3 C) 10 D) 9 E) 12

5. Reduzca la siguiente expresion:

$$\left[\frac{\sqrt[3]{\log 2} + \sqrt[3]{\log 3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sqrt[3]{\log 100}}{\sqrt[3]{\log_5 2} + \sqrt[3]{\log_5 3} + \ldots\ldots\ldots + \sqrt[3]{\log_5 100}}\right]^3$$

A) $\log 5$ B) $\log 4$ C) $\log\frac{1}{4}$ D) $\log 25$ E) $\log 3$

6. Reduce:

$$E = \operatorname{Colog}_4 \log_2 \log_2 \operatorname{Antilog}_4 \log_{1,4} 1,96$$

A) –0.5 B) –1.5 C) –4 D) 1.5 E) 2

7. Para cada par ordenado de números (x; y) que satisfagan:

$$\log_2(2x+y) = \log_4(x^2 + xy + 7y^2)$$

existe un número real “k” tal que:

$$\log_3(3x+y) = \log_9(3x^2 + 4xy + ky^2)$$

el posible valor de k es: (x > 0; y > 0)

A) 9 B) 12 C) 14 D) 21 E) 7

8. Si $\log_{xy} x = 4$, calcule el valor de: $\log_{xy}\sqrt[15]{\dfrac{x^5}{y^3}}$

A) 29/15 B) 15/29 C) 3 D) 5 E) 3/5

9. Sabiendo que: Log Log Log x = 1 + Log 2. Calcular:

$$R = \sqrt{\operatorname{Log}\sqrt{\operatorname{Log}\sqrt{\operatorname{Log} x}}}$$

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{10}/2$ C) 1/2
D) $\sqrt{2}/2$ E) $\sqrt{2}$

10. Efectuar:

$$\frac{3}{\log_2 45 + 3} + \frac{2}{\log_3 40 + 2} + \frac{1}{\log_5 72 + 1}$$

A) 2 B) – 1 C) 1 D) 1/2 E) – 1/2

11. Si $\log_b n = 2$ y $\log_n(2b) = 2$, determine el valor de: $\log_{b^2}(2b)$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 3

12. El número de valores reales de “x” que satisfacen la ecuación:

$$\log(\log x) + \log\left[\log(x^3) - 2\right] = 0,\ \text{es:}$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 0

EJERCICIOS DE EVALUACIÓN

1. Si $\log 3 = a$, $\log 2 = b$. Halla: $\log 5!$

A) 3a + b + 1 B) a – b + 2 C) 3a – 2b + 1
D) a + 2b + 1 E) 2b – a + 1

2. La expresion:

$$\operatorname{antilog}\left[\frac{1}{3}\left(\log a + \frac{1}{2}\log b - 2\log c\right)\right]$$

es igual a:

A) $\sqrt[3]{\dfrac{a\sqrt{b}}{c^2}}$ B) $\sqrt{\dfrac{a\sqrt{b}}{c^2}}$ C) $\sqrt[3]{\dfrac{ab}{c^2}}$
D) $\sqrt[3]{\dfrac{a\sqrt{b}}{c^2}}$ E) $\dfrac{ab}{c^2}$

3. Si: a > b > c > 1, reducir:

$$E = \frac{\log_c a + 1}{\log_c b \log_b(a^2c^2)}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{a.c}{b}$ C) abc D) 1 E) 2

4. Si: $a_k = \dfrac{k+1}{k}$, calcular:

$$\log_b a_1 + \log_b a_2 + \ldots\ldots + \log_b a_{99}$$

donde: $b = 10^{\frac{4}{7}}$

A) 3 B) 2 C) 3,5 D) 4 E) 2,5

5. Calcular:

$$9\log_8\left(\frac{1}{3}+\log_4\sqrt[3]{2}\right)^{-4}$$

A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 13

6. Si a, $b\in\mathbb{R}^+$ distintos de la unidad y ademas ab = 1. Determine el valor de:

$$a^{\log_b 0{,}5}+b^{\log_a 0{,}2}$$

A) 2 B) 5 C) 7 D) 10 E) 12

7. Resolver: $\log_x(x^x)^{x^x}=(x^2)^{x-2}$, indicar el valor de: (x^2-1)

A) 15 B) 8 C) 24 D) 37 E) 48

8. Determine el número de pares ordenados (a, b) de números enteros tales que:
$\log_a b+6\log_b a=5,\ \ 2\le a\le 2019\ \text{ y }\ 2\le b\le 2019$

A) 54 B) 34 C) 37 D) 16 E) 13

9. Resolver la ecuación:

$$x+\log(1+2^x)=x\log 5+\log 6$$

Hallar: $\sqrt[x+1]{x-1}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 3) 8

10. Si $10^a=27;\ \ 10^b=15$, hallar log2 en términos de a y b.

A) $\frac{1}{3}(a+3b-3)$ B) $\frac{1}{3}(a-3b+3)$
C) $\frac{1}{3}(3b-a-3)$ D) $\frac{1}{3}(3b-a+3)$
D) $\frac{1}{3}(a+3b+3)$

11. Si M = $\text{Log}_2 80$ – $\text{Log}_2 5$, entonces M^2 + M es igual a:

A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

12. Hallar el valor de “n”, si:
$\log_3 9+\log_3 9^2+\log_3 9^3+\ldots..+\log_3 9^n=\log_3 9^{28}$
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9